Obogaćivanje početne nastave geometrije povijesnim idejama i crticama

Meglaj, Valentina

SVEUČILIŠTE U RIJECI

UČITELJSKI FAKULTET U RIJECI

Valentina Meglaj

Obogaćivanje početne nastave geometrije povijesnim idejama i crticama

DIPLOMSKI RAD

Rijeka, 2024. godina

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da sam diplomski rad izradila samostalno, uz preporuke i savjetovanje s mentorom.

U izradi rada pridržavala sam se Uputa za izradu diplomskog rada i poštivala odredbe Etičkog kodeksa za studente/studentice Sveučilišta u Rijeci o akademskom poštenju.

Potpis studentice:

Meglaj Valentina

Meglaj Valentina

SVEUČILIŠTE U RIJECI

UČITELJSKI FAKULTET U RIJECI

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni učiteljski studij

Obogaćivanje početne nastave geometrije povijesnim idejama i crticama

DIPLOMSKI RAD

Predmet: Metodika matematike

Mentor: dr. sc. Neva Slani, v. pred.

Student: Valentina Meglaj

Matični broj: 1191236762

U Rijeci, studeni, 2024.godina

POSVETA

Ovaj je rad posvećen svim budućim učiteljima i učiteljicama *kako bi se dodatno informirali o mogućnostima obogaćivanja početne nastave geometrije u nastavi matematike te kako bi djeci dodatno približili i povećali interes za taj predmet.*

Od srca zahvaljujem svojoj obitelji, najviše mami i tati*, koji su od početka mog studiranja moja podrška i oslonac u svim mojim usponima i padovima. Izdržali smo do kraja i zajedničkim snagama danas došli do konačnog uspjeha - vrhunca mog dosadašnjeg obrazovanja, koraka u novi život. Cijelo to potignuće predstavlja upravo ovaj rad pisan s puno ljubavi, žara i ponosa.*

Uz moju obitelj, velike zahvale dugujem i svim svojim bližnjima koji su bili uz mene, kao i svojoj mentorici profesorici dr. sc. Nevi Slani, v. pred., bez koje ovaj rad ne bi bio moguć te koja je strpljivo ispravljala svaku moju rečenicu i pogrešku.

„Tko razumije geometriju, posjeduje moć razumijevanja svijeta.“

Galileo

SAŽETAK

Matematika kao nastavni predmet ima značajnu ulogu u razvijanju važnih individualnih vještina kao što su kritičko razmišljanje, logičko povezivanje, kreativnost, samoinicijativnost, sposobnost rješavanja zadataka i brojne druge. Jedna od grana matematike koja doprinosi razvoju tih vještina je geometrija. Ona je posvećena proučavanju oblika, tijela, prostora i njihovih odnosa. Tema ovog diplomskog rada odabrana je kako bi se ispitale mogućnosti da se uvrštavanjem crtica i ideja iz povijesti geometrije obogati nastava matematike od prvog do četvrtog razreda osnovne škole. Integriranjem takvih sadržaja ostvarila bi se i veća povezanost između dva predmeta, Matematike i Prirode i društva u dijelu koji se odnosi na povijest i povijesna razdoblja. Rad je motiviran idejom unapređenja nastave geometrije integriranjem povijesnih sadržaja te se u njemu analizira zasnovanost takve ideje. Započinje prethodnim pregledom povijesnog razvoja geometrije, od razvoja pisma pa sve do modernog doba. U narednom poglavlju analizira se literatura koja istražuje metode i dobrobiti obogaćivanja nastave matematike i posebice geometrije povijesnim sadržajima. Slijede konkretni prijedlozi obogaćivanja redovne razredne nastave geometrije povijesnim crticama. Prijedlozi su usklađeni i vođeni kurikulom nastavnog predmeta Matematika iz 2019. godine. Zatim slijedi devet projektnih zadataka koji su pogodni za provedbu u nižim razredima osnovne škole. Izdvajaju se ciljevi provedbe svakog zadatka, navode se materijali potrebni za njihovu provedbu kao i hodogrami aktivnosti koji su potrebni za provedbu svakog projektnog zadatka.

Ključne riječi: matematika, geometrija, znanost, razredna nastava, povijesne ideje, povijest geometrije

SUMMARY

Mathematics as a subject plays a significant role in developing important individual skills such as critical thinking, logical reasoning, creativity, initiative, problem-solving ability, and many others. One branch of mathematics that contributes to the development of these skills is geometry. It is dedicated to the study of shapes, bodies, spaces, and their relationships. The topic of this thesis was chosen to explore the possibilities of enriching mathematics teaching from the first to the fourth grade of primary school by incorporating anecdotes and ideas from the history of geometry. By integrating such content, a greater connection could be achieved between the two subjects, Mathematics and Nature, in the part related to history and historical periods. This work is motivated by the idea of improving geometry teaching by integrating historical content, and it analyzes the foundation of such an idea. It begins with a review of the historical development of geometry, from the development of writing to the modern era. The next chapter analyzes literature that investigates methods and benefits of enriching mathematics teaching, particularly geometry, with historical content. Following that are specific proposals for enriching regular geometry classroom instruction with historical anecdotes. The proposals are aligned with and guided by the 2019 curriculum for the Mathematics subject. Then, nine project tasks suitable for implementation in the lower grades of primary school are provided. The objectives of each task are highlighted, and the materials needed for their implementation, as well as the activity schedules necessary for the execution of each project task, are specified.

Keywords: mathematics, geometry, science, primary education, historical ideas, history of geometry

Sadržaj

1. Uvod

Matematika kao temeljna znanstvena disciplina i temeljni nastavni predmet igra ključnu ulogu u razvoju kritičkog mišljenja, analitičkih sposobnosti i rješavanju problema u životu svakog pojedinca (Whitney-Smith i sur., 2022). Ona *je „znanstveno razvijeni logički sustav koji proučava idealne objekte i pojmove nastale apstrakcijom brojenja i mjerenja te povezuje varijable (npr. promjenljive veličine), apstraktne strukture (npr. brojeve, skupove, vektore) i prostore (npr. euklidski, vektorski, metrički, normirani)“.*[1] Unatoč apstraktnoj naravi ima izrazito bogatu i dugotrajnu povijest, sa začecima u prapovijesti, i fascinantnu unutarnju uređenost. „Matematika je pronicavost i domišljatost i bljesak nečega shvaćenoga odjednom, ali ona je također nešto kristalno čisto i postojano kao gotička katedrala“ (Berlinski, 2011:16). Ebrahim (2010:1) kaže kako je matematika drevno područje ljudskog znanja prisutno već u najranijim pisanim zapisima o čovjeku, prapovijesnim arheološkim dokazima i u kognitivnim sposobnostima čovjeka. Najraniji pravi matematički tekstovi datiraju iz približno 2000. godine pr. Kr., no postoje i stariji zapisi iz do približno 3000 godina pr. Kr. koji svjedoče o postojanju matematičke misli u kulturama starog Egipta i starovjekovnih naroda Mezopotamije. No, matematika je, a moguće i geometrija, starija od prve pisane riječi, a moguće i bilo kakvih zapisa. Što je i kada ponukalo čovjeka da broji, mjeri i crta geometrijske oblike možemo samo spekulirati (Merzbach i Boyer, 2011). Artefakti koji dokazuju da je davni čovjek brojao stari su i do 40 000 godina prema današnjim pretpostavkama, a postoje i oni stari oko 7000 godina koji su služili za brojenje.

Povijesni razvoji matematike i geometrije usko su povezani te je tako geometrija uz aritmetiku najstarija grana matematike. Geometrija se bavi promatranjem i analizom oblika u prostoru naglašavajući simetrije, sukladnosti, sličnosti, uzorke i druga svojstva koja se čine intuitivna, ali nudi i vizualan način prikazivanja i promišljanja odnosa čisto apstraktnih entiteta. Zapravo, ona je najraniji i najljepši primjer vježbanja dobrog zaključivanja i njenim izučavanjem vježba se jedan od najboljih sustava zaključivanja koje su ljudi pronašli u povijesti.[2] Znanje geometrije pomaže učenicima u razvoju različitih sposobnosti poput kritičkog razmišljanja, logičkog povezivanja i argumentiranja, prostornog zora, kreativnosti, samoinicijativnosti, dokazivanja i brojnih drugih (Jablonski i sur., 2023).

[1] matematika. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. Pristupljeno 2.9.2024. https://enciklopedija.hr/clanak/matematika
[2] geometrija. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. Pristupljeno 5.9.2024. https://www.enciklopedija.hr/clanak/geometrija

S obzirom na bogatu povijest geometrije, i podučavanje geometrije ima bogatu tradiciju. U prilog tome govori i činjenica da školska geometrija, euklidska, počiva intenzivno na Euklidovim i općenito idejama starogrčkih matematičara, i crpi najvažnije povijesne ideje do 19.st prezentirajući ih u pročišćenoj verziji. Stoga poznavanje povijesti i korijena matematičkih ideja zasigurno pomaže u razumijevanju matematike pa je razumno pitati se koliko bi povijesne ideje i postignuća trebalo uvrstiti u samu nastavu matematike, posebno geometrije te bi li time nastava postala kvalitetnija, a njeni rezultati bolji.

U ovom radu pokušalo se odgovoriti na pitanja mogućnosti inkluzija povijesnih sadržaja u nastavi geometrije, orijentirano na razrednu nastavu. Geometrija je prema mnogobrojnim istraživanjima danas učenicima dosta nerazumljiva i teška, ali i izazovna te je ispitivanje metoda i sadržaja kojima bi se kod učenika potaknuo interes i želja za učenjem geometrije, odnosno matematike, sigurno od velike važnosti za unapređenje kurikuluma (Sriraman, 2005). Pogotovo kad se u obzir uzme koliko je znanje geometrije važno u svakodnevici te za mnoge profesije, primjerice graditeljstvo, arhitekturu, automobilsku industriju, astronomiju, robotiku, umjetnost i brojne druge.

Cilj rada je praktičan odgovor na koji se način povijesna saznanja i činjenice mogu uklopiti u nastavu geometrije i je li se takva praksa ispitala i pokazala dobrom. Također, jedan od ciljeva je utvrđivanje načina i učinaka korištenja povijesnih crtica u nastavi matematike kako bi se poboljšala kvaliteta nastave matematike i učenicima olakšalo usvajanje zadanih odgojno-obrazovnih ishoda.

Korištenje metode pri pisanju ovog diplomskog rada su teorijsko istraživanje pregledom znanstvene i stručne literature, metoda sinteze (osobito u formulaciji zaključaka i prijedloga za unaprjeđenja nastave matematike) te komparativna metoda.

2. Odnos matematike i geometrije te njihov položaj u nacionalnom školskom kurikulu

Postoje mnoge definicije matematike, a prema mrežnom izvoru matematika, čije ime dolazi od grčke riječi znanost te je „egzaktna znanost koja izučava aksiomatski definirane apstraktne strukture koristeći se matematičkom logikom“.[3]

Prema Klaričić-Bakula (2007) naivna, ali povijesno razumljiva definicija matematike glasi da je matematika znanost o količini i prostoru. Korijen ovakve jednostavne definicije je u povijesti matematike, odnosno aritmetici i geometriji kao njenim polazištima. Klaričić-Bakula (2007:4-5) navodi i kako se slika matematike kroz (modernu) povijest mijenja, a intenzivno se to događa u 19. i početkom 20. st. Benjamin Pierce ju definira kao znanost o donošenju potrebnih zaključaka (Yadav, 2017). Time se naglašava logičko zaključivanje kao i srž matematike, te dodatno ističe njen deduktivni karakter.

Mrežno izdanje enciklopedije Britannica navodi kako je „matematika znanost o strukturi, redu i odnosu koja se razvila iz elementarnih praksi brojanja, mjerenja i opisivanja oblika predmeta“.[4]

Prema Hrvatskoj enciklopediji Leksikografskog zavoda Miroslava Krleže matematika je „znanstveno razvijeni logički sustav koji proučava idealne objekte i pojmove nastale apstrakcijom brojenja i mjerenja te povezuje varijable, apstraktne strukture i prostore“. [5]

Kao što različiti izvori definiraju matematiku na različite načine i s različitog gledišta, tako ne postoji jedinstvena definicija geometrije. Ipak, veće je slaganje oko toga što je geometrija. Većinom se geometrija definira kao grana matematike koja se bavi svojstvima prostora i oblika odnosno figura u prostoru, kao što su udaljenost, oblik, veličina i položaj. Geometrija je, uz aritmetiku, jedna od najstarijih grana matematike.[6]

[3] Matematika. (2024, srpanj 27). 'Wikipedija, Slobodna enciklopedija. Dobavljeno 16:26, rujna 5, 2024 iz //hr.wikipedia.org/w/index.php?title=Matematika&oldid=6996165

[4] Folkerts, M. , Knorr, . Wilbur R. , Gray, . Jeremy John , Berggren, . John L. and Fraser, . Craig G. (2024, August 29). mathematics. Encyclopedia Britannica. https://www.britannica.com/science/mathematics

[5] matematika. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. Pristupljeno 5.9.2024. https://enciklopedija.hr/clanak/matematika

[6] Wikipedia contributors. (2024, August 24). Geometry. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 17:14, September 2, 2024, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometry&oldid=1241952882

Prema Hrvatskoj enciklopediji Leksikografskog zavoda Miroslava Krleže geometrija je „grana matematike koja u svojoj izvornoj problematici proučava položaj, oblik i svojstva geometrijskih tijela u prostoru te njihov međusobni odnos“.[7]

U kartici iz mrežnog izdanja enciklopedije Britannica geometrija je „grana matematike koja se bavi oblikom pojedinačnih objekata, prostornim odnosima među različitim objektima i svojstvima okolnog prostora“. Jedna je od najstarijih grana matematike nastala je kao odgovor na praktične probleme kao što su oni koji se nalaze u zemljomjerstvu, na što ukazuje i samo značenje grčkih riječi mjerenje Zemlje od kojih joj naziv potječe. No, geometrija ne mora biti ograničena na proučavanje geometrijskih objekata ravnih površina (ravninska geometrija ili planimetrija) ili objekata u prostoru (geometrija prostora ili stereometrija), već čak i najapstraktnije misli i slike mogu biti predstavljene i razvijene u geometrijskim terminima.[8]

Scriba i Schreiber (2005:5) navodi da je geometrija „grana znanosti koja se bavi pravilnim uzorcima, oblicima i krutim tijelima“.

Prema Pravilniku o znanstvenim i interdisciplinarnim područjima, poljima i granama te umjetničkom području, poljima i granama[9] matematika spada u prirodne znanosti, a jedna od njenih grana jesu geometrija i topologija.[10]

U Nacionalnom okvirnom kurikulu iz 2019. navodi se da je matematika “znanost koja izučava kvantitativne odnose, strukture, oblike i prostore, pravilnosti i zakonitosti i druge pojave. Izučava kvantitativne odnose, strukturu, oblike i prostor, pravilnosti i zakonitosti, analizira slučajne pojave, promatra i opisuje promjene u različitim kontekstima te daje precizan simbolički jezik i sustav za opisivanje, prikazivanje, analizu, propitivanje, tumačenje i posredovanje ideja”. Cilj nastave Matematike prema istom je dokumentu “stjecanje znanja, vještina, sposobnosti, načina mišljenja i stavova nužnih za uspješno i korisno sudjelovanje u društvu”. Navode se konkretne sposobnosti koje učenje Matematike potiče. U novim kurikularnim dokumentima preskočeno je eksplicitno objašnjenje što je matematika, dok su odgojno-obrazovni ciljevi područja dalje intenzivno razrađeni. Među postignućima istaknuta su znanja i vještine, ali i posebno naglašene matematičke kompetencije te kompetencije koje se

---

[7] geometrija. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. Pristupljeno 2.9.2024. https://www.enciklopedija.hr/clanak/geometrija
[8] Heilbron, J. (2024, July 19). geometry. Encyclopedia Britannica. https://www.britannica.com/science/geometry
[9] https://www.zakon.hr/cms.htm?id=59278
[10] NN 3/2024 (5.1.2024.), Pravilnik o znanstvenim i interdisciplinarnim područjima, poljima i granama te umjetničkom području, poljima i granama

potiču i njeguju matematikom. Pritom su matematička znanja i vještine svrstane u pet matematičkih domena (Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje, Podatci, Statistika i vjerojatnost), dok se razvoj kompetencija posebno naglašava kroz primjenu matematičkih procesa (Prikazivanje i komunikacija, Povezivanje, Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, Rješavanje problema i matematičko modeliranje, Primjena tehnologije) (Nacionalni dokument matematičkog područja kurikuluma, 2019). Gradivo Matematike ne može se i ne smije strogo svrstati u određenu domenu već se one moraju povezivati i nužno isprepliću, što vrijedi onda i za sadržaje iz geometrije, no primarno oni pripadaju domenama Oblik i prostor te Mjerenje. Naravno, bez domene Brojevi ne možemo graditi domenu Mjerenje.

Prema Odluci o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (NN 77/2019), mjerenje je uspoređivanje neke veličine s istovrsnom veličinom koja je dogovorena jedinica mjere, a prilikom podučavanja ove domene, usvajaju se standardne mjerne jedinice za novac, duljinu, površinu, volumen, masu, vrijeme, temperaturu, kut i brzinu te ih se mjeri odgovarajućim mjernim uređajima i kalendarom. Procjenjivanjem, mjerenjem, preračunavanjem i izračunavanjem veličina određuju se mjeriva obilježja oblika i pojava uz razložnu i učinkovitu upotrebu alata i tehnologije. Rezultati se interpretiraju i izražavaju u jedinici mjere koja odgovara situaciji.

Domena Oblik i prostor u Odluci o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne i srednje škole odnosi se na niz matematičkih koncepata i vještina povezanih s geometrijom, odnosno proučavanjem oblika, veličina, prostora i njihovih međusobnih odnosa. U okviru ove domene, učenici stječu sposobnost vizualizacije, analize i interpretacije geometrijskih oblika i struktura. Učenici uče prepoznati, opisivati i analizirati osnovne geometrijske oblike (npr. trokut, kvadrat, krug, pravokutnik, kocka, kugla, valjak). Ovo uključuje razumijevanje svojstava oblika, poput broja stranica, kutova, bridova, površine i volumena. „Rastavljanjem i sastavljanjem oblika uspoređuju njihova svojstva i uspostavljaju veze među njima“ (Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, NN 77/2019). Iz uočenih svojstava i odnosa izvode se pretpostavke i tvrdnje koje se dokazuju crtežima i algebarskim izrazima. Uz to, učenici razvijaju sposobnost razumijevanja i opisivanja položaja objekata u prostoru (npr. iznad, ispod, pored, ispred, iza), uče mjeriti i izračunavati duljine, površine i volumene različitih geometrijskih likova i tijela (Tablica 1). Učenici se bave geometrijskim konstrukcijama koristeći matematičke alate poput ravnala i šestara, razvijajući tako preciznost i razumijevanje osnovnih geometrijskih načela. „Interakcijom s ostalim domenama i matematičkim argumentiranjem prostornih veza, rabeći prostorni zor i modeliranje, učenici pronalaze primjenu matematičkih rješenja u različitim situacijama. Prepoznaju ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnome okružju te ih upotrebljavaju za opis i analizu svijeta oko sebe“ (Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, NN 77/2019). Geometrija pomaže učenicima razumjeti prostor i oblike oko sebe. Kroz geometrijske zadatke, učenici uče kako prepoznati, opisati i manipulirati oblicima u dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom prostoru. Rješavanje geometrijskih problema zahtijeva primjenu logike i deduktivnog zaključivanja. Učenici moraju koristiti te vještine kako bi dokazali teoreme ili pronašli rješenja, što im pomaže u razvoju kritičkog mišljenja. Često se koristi u svakodnevnom životu, od arhitekture do dizajna, umjetnosti i inženjeringa. Razumijevanje geometrijskih koncepata omogućava učenicima primjenu matematičkih znanja u stvarnim situacijama. Mnogi složeniji matematički pojmovi, poput trigonometrije i linearne algebre, temelje se na geometriji. Dobro razumijevanje geometrije priprema učenike za uspjeh u ovim naprednijim disciplinama te potiče učenike da vizualiziraju probleme i rješenja, što je važna vještina ne samo u matematici, već i u mnogim drugim područjima poput znanosti, tehnologije i umjetnosti (NN 77/2019).

Tablica 1. Popis odgojno-obrazovnih ishoda i sadržaja iz matematike u nižim razredima osnovne škole

Razred	Domena	Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj
1. razred	C – Oblik i prostor	MAT OŠ C.1.1. Izdvaja i imenuje geometrijska tijela i likove i povezuje ih s oblicima objekata u okružju.	Geometrijska tijela (kugla, valjak, kocka, kvadar, piramida, stožac) i likovi (trokut, kvadrat, pravokutnik, krug). Ravne i zakrivljene plohe.
		MAT OŠ C.1.2. Crta i razlikuje ravne i zakrivljene crte.	Ravne i zakrivljene crte. Otvorene, zatvorene i izlomljene crte.
		MAT OŠ C.1.3. Prepoznaje i ističe točke.	Točka. Točka kao sjecište crta.
	D – Mjerenje	MAT OŠ D.1.1. Analizira i uspoređuje objekte iz okoline prema mjerivu svojstvu.	Odnosi među predmetima (dulji – kraći – jednako dug, veći – manji – jednak).

2. razred	**C – Oblik i prostor**	MAT OŠ C.2.1. Opisuje i crta dužine.	Dužina kao najkraća spojnica dviju točaka. Krajnje točke. Stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta. Bridovi geometrijskih tijela.
		MAT OŠ C.2.2. Povezuje poznate geometrijske objekte.	Povezivanje geometrijskih objekata (geometrijska tijela, geometrijski likovi, dužine i točke).
	D – Mjerenje	MAT OŠ D.2.2. Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.	Procjena i mjerenje duljine dužine. Računanje s jedinicama za mjerenje dužine (u skupu brojeva do 100).
		MAT OŠ D.2.3. Procjenjuje i mjeri vremenski interval.	Procjena i mjerenje duljine vremenskoga intervala. Računanje s jedinicama za vrijeme (u skupu brojeva do 100).
3. razred	**C – Oblik i prostor**	MAT OŠ C.3.1. Opisuje i crta točku, dužinu, polupravac i pravac te njihove odnose.	Pravac, polupravac i dužina kao dijelovi pravca.
		MAT OŠ C.3.2. Prepoznaje i crta pravce u različitim međusobnim odnosima.	Pravci koji se sijeku. Crtanje usporednih i okomitih pravaca.
		MAT OŠ C.3.3. Služi se šestarom u crtanju i konstruiranju.	Crtanje i konstruiranje šestarom (kružnica, pravokutnik i kvadrat). Prenošenje dužine zadane duljine.
	D - Mjerenje	MAT OŠ D.3.1. Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.	Procjena, mjerenje i crtanje dužine zadane duljine. Jedinice za mjerenje dužine (mm, cm, dm, m, km). Računanje s jedinicama za mjerenje dužine (u skupu brojeva do 1000).
		MAT OŠ D.3.2. Procjenjuje i mjeri masu tijela.	Procjena i mjerenje mase tijela. Uspoređivanje mase tijela. Mjerne jedinice za masu (g, dag, kg, t). Računanje s mjernim jedinicama za masu (u skupu brojeva do 1000).
		MAT OŠ D.3.3. Određuje opseg likova.	Opseg trokuta, pravokutnika i kvadrata kao zbroj duljina stranica.

		MAT OŠ D.3.4. Procjenjuje i mjeri volumen tekućine.	Procjena i mjerenje volumena tekućine. Mjerne jedinice za volumen tekućine (litra, decilitar).
4. razred	**C – Oblik i prostor**	MAT OŠ C.4.1. Određuje i crta kut.	Pravi, šiljasti i tupi kut. Crtanje kuta.
		MAT OŠ C.4.2. Razlikuje i opisuje trokute prema duljinama stranica te pravokutni trokut.	Vrste trokuta prema duljini stranica (jednakostranični, raznostranični, jednakokračni). Pravokutni trokut.
		MAT OŠ C.4.3. Opisuje i konstruira krug i njegove elemente.	Krug i kružnica. Konstrukcija kruga i njegovih elemenata (kružnica, polumjer, središte).
		MAT OŠ C.4.4. Crta i konstruira geometrijske likove.	Crtanje geometrijskih likova (raznostranični i pravokutni trokut, pravokutnik i kvadrat). Konstruiranje geometrijskih likova (jednakostranične, raznostranične i jednakokračne trokute).
		MAT OŠ C.4.5. Povezuje sve poznate geometrijske oblike.	Povezivanje geometrijskih pojmova u opisivanju geometrijskih objekata (vrhovi, strane, stranice, bridovi, kutovi).
	D – Mjerenje	MAT OŠ D.4.1. Procjenjuje i mjeri volumen tekućine.	Procjena i mjerenje volumena tekućine. Računanje s mjernim jedinicama za volumen tekućine (litra, decilitar). Preračunavanje mjernih jedinica.
		MAT OŠ D.4.2. Uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima.	Mjerenje površine. Kvadratna mreža. Mjerne jedinice za površinu.

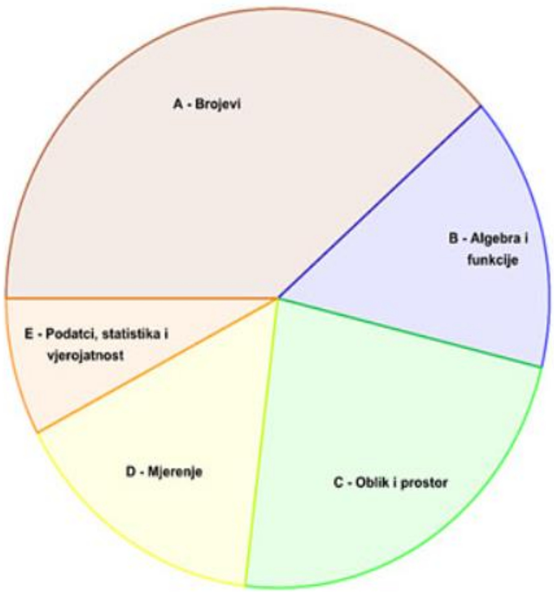
Tablica 2. Popis nastavnih jedinica iz matematike u nižim razredima osnovne škole

Razred	Geometrijske teme	Nastavne jedinice	Izvor
Prvi razred	1) Prostorni odnosi i tijela u prostoru 2) Točka 3) Geometrijski likovi 4) Geometrijska tijela 5) Točka 6) Ravne i zakrivljene crte i plohe	1) Odnosi među predmetima i bićima 2) Kugla i valjak 3) Kocka i kvadar 4) Piramida i stožac 5) Kvadrat i pravokutnik 6) Krug i trokut	Martić i sur., Super matematika za prave tragače 1. i 2. dio, 2019
Drugi razred	1) Dužina i duljina dužine 2) Geometrijski objekti, njihovi vrhovi i bridovi	1) Dužina i duljina dužine	Martić i sur., Super matematika za prave tragače 1. i 2. dio, 2020
Treći razred	1) Dužina i duljina dužine, pravac i polupravac 2) Prenošenje dužine 3) Odnosi pravaca (okomitost/usporednost) 4) Krug i kružnica 5) Pravokutnik i kvadrat (crtanje) 6) Opseg pravokutnika, kvadrata i trokuta 7) Mjerenje mase 8) Mjerenje obujma tekućine	1) Krug i kružnica 2) Crtanje geometrijskih likova i opseg	Martić i sur., Super matematika za prave tragače 1. i 2. dio, 2023
Četvrti razred	1) Ravnina 2) Vrste kutova (pravi, šiljasti, tupi) 3) Trokut i vrste trokuta prema duljinama stranica 4) Pravokutni trokut 5) Pravokutnik i kvadrat – crtanje 6) Površina i opseg pravokutnika i kvadrata 7) Mjerenje površina	1) Geometrija i mjerenje	Jakovljević Rogić i sur., Moj sretni broj 4, 2021

	8) Mjerne jedinice za površinu 9) Volumen tekućine		

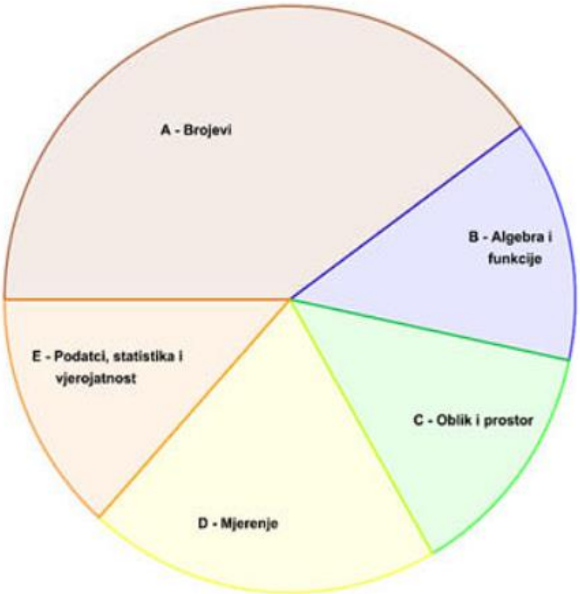
Detaljnom analizom navedenih udžbenika (Tablica 2) utvrđeno je kako povijesnih sadržaja u nastavi geometrije uopće nema. Analizom kurikuluma za nastavni predmet Matematika uvidjeli smo da u njemu ne postoji navođenje povijesnih tema vezanih za nastavu geometrije u nižim razredima osnovne škole. U samom kurikulumu nastavnog predmeta Matematika grafički je prikazana organizacija predmetnoga kurikuluma u prvom obrazovnom ciklusu (od 1. do 4. razreda osnovne škole).

Slika 1. Grafički prikaz organizacije predmetnoga kurikuluma u prvom obrazovnom ciklusu – 1. razred osnovne škole



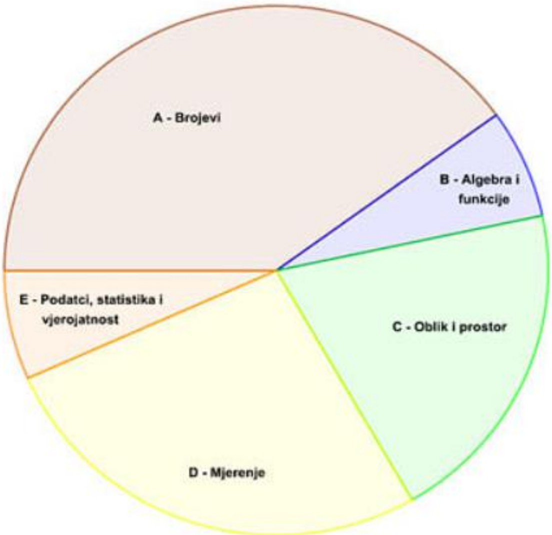
Izvor: Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (NN 77/2019)

Slika 2. Grafički prikaz organizacije predmetnoga kurikuluma u prvom obrazovnom ciklusu – 2. razred osnovne škole



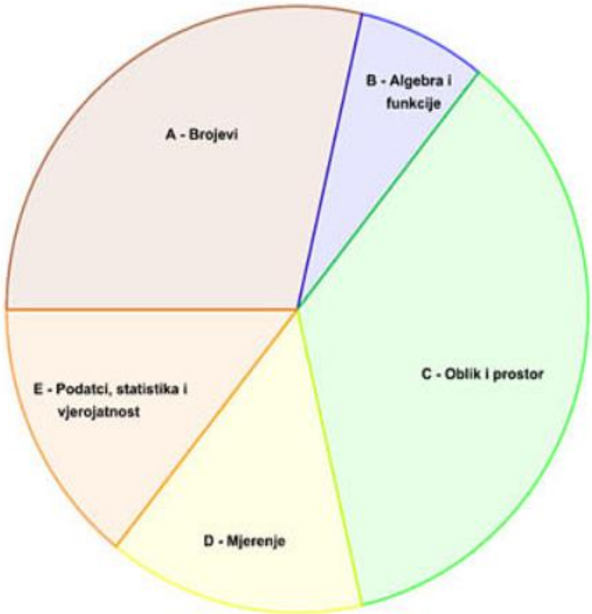
Izvor: Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (NN 77/2019)

Slika 3. Grafički prikaz organizacije predmetnoga kurikuluma u prvom obrazovnom ciklusu – 3. razred osnovne škole



Izvor: Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (NN 77/2019)

Slika 4. Grafički prikaz organizacije predmetnoga kurikuluma u prvom obrazovnom ciklusu – 4. razred osnovne škole



Izvor: Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (NN 77/2019)

Na grafičkim prikazima vidljiva je zastupljenost domena u prvom obrazovnom ciklusu (od prvog do četvrtog razreda osnovne škole). Prema Odluci o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (NN 77/2019), odnosno zastupljenost domene Oblik i prostor te Mjerenje, jasno je da geometrija zauzima značajnu ulogu u nastavi matematike.

U ovom radu neće se analizirati ciljeve i svrhu podučavanja geometrije, ali će se za dobivanje okvirne slike razvoja geometrijskog mišljenja spomenuti van Hieleova teorija, u većoj mjeri utkanu u naš važeći kurikul. Teorija je po svojoj naravi primjenjiva na sva područja matematike, a može se promatrati kroz tri različita aspekta, a to su redom proces razvoja mišljenja, karakteristike razvoja te strategija podučavanja u svrhu napredovanja. Temeljna misao Van Hieleove teorije je da bi se razvoj geometrijskog mišljenja trebao razvijati postupno, na pet različitih razina:

1. Razina 0 - Vizualizacija
2. Razina 1 – Analiza
3. Razina 2 – Neformalna dedukcija
4. Razina 3 – Dedukcija

5. Razina 4 – Formalna dedukcija
6. Razina 5 – Strogost

Prijelaz između razina trebao bi se organizirati kroz pet faza učenja (informacije, vođena orijentacija, objašnjavanje i razvoj razumijevanja, slobodna orijentacija i integracija), a sve s ciljem potpunog ostvarenja postavljenog cilja pri podučavanju geometrije, razumijevanju geometrijskih koncepata i njihovih veza (Baranović, 2019:7). Teoriju su 1957. godine razvili supružnici Dina Van Hiele-Geldof i Pierre van Hiele sa Sveučilišta Utrecht u Nizozemskoj. Van Hiele iznosi kako se učinkovito učenje odvija samo kad učenici aktivno doživljavaju ono o čemu uče te sudjeluju u raspravi. Važna je jer pruža učiteljima smjernice za uspješno poučavanje geometrije, osigurava da učenici razvijaju razumijevanje u skladu s njihovim kognitivnim sposobnostima i potiče aktivno učenje. Naglašava važnost aktivnog i iskustvenog učenja, praktičnog rada i manipulacije geometrijskim oblicima, što doprinosi dubljem učenju. Pomaže učenicima da vide povezanost geometrije s drugim područjima matematike i znanosti. Veza između van Hieleove teorije i povijesti geometrije ističe se u evoluciji procesa učenja i razumijevanja geometrijskih pojmova te se istovremeno naglašava važnost povijesnog konteksta u razvoju geometrije kao discipline.

5. Razvoj geometrije kroz povijest matematike

Matematika je jedinstven aspekt ljudske misli, a njezina se povijest bitno razlikuje od ostalih povijesti. Geometrija, kao grana matematike, koja seže tisućama godina unazad, počinje s osnovnim pitanjima o mjerenju i proporcijama, a razvija se u složen sustav apstraktnih teorija koje su oblikovale ne samo matematičko mišljenje, već i arhitekturu, umjetnost i znanost. Geometrija je bila jedna od prvih ljudskih pokušaja, nakon brojanja, da se bave matematikom. Grčki je povjesničar Herodot posjetio Egipat oko 450.godine pr. Kr. Razgledavao je drevne spomenike, razgovarao sa svećenicima te promatrao veličanstvenu rijeku Nil. Smatrao je kako je geometrija potekla iz Egipta jer je vjerovao da je tamo nastala iz praktičnih svakodnevnih potreba nakon godišnjih poplava rijeke Nil kada je bilo nužno mjerenje zemljišta, zatim graditeljstva te astronomije (Merzbach i Boyer, 2011). Drevni narodi poput Sumerana, Babilonaca i Egipćana razvijali su osnovne geometrijske ideje, no bez formalnih dokaza. Geometrija je dosegla svoj vrhunac u antičkoj Grčkoj, gdje su matematičari poput Talesa, Pitagore i Euklida pridonijeli njenom razvoju kao apstraktne znanosti. Ključno djelo Euklidovi Elementi postali su temelj za sustavno proučavanje geometrije kakvu poznajemo danas te učimo u školama (Merzbach i Boyer, 2011:8). Nakon pada Zapadnog Rimskog Carstva prevodila su se i proširivala znanja zapisana u grčkim spisima, a ponovno otkriće grčkih spisa u renesansi potaknulo je ponovno zanimanje za geometriju. U 19. stoljeću dogodili su se značajni pomaci u razvoju neeuklidske geometrije od strane matematičara Gaussa, Lobačevskog i Riemanna te su ti razvoji uzdrmali temelje klasične geometrije i doveli do novih načina razmišljanja o prostoru (Merzbach i Boyer, 2011). Kasnije je geometrija evoluirala u apstraktnije oblike u 20. stoljeću, uključujući topologiju i diferencijalnu geometriju, koje su postale bitne i u drugim znanostima.

3.1. Začetak geometrije

Priroda je ljudima oduvijek nudila višestruko zakrivljene linije poput vlati trave ili debla što može asocirati na pojam o pravcu ili pak krugu. Stoga se s razlogom smatra da su geometrijski oblikovani ukrasi postojali već 40 000 godina prije Krista. Primjerice u kretskoj se kulturi mogu pronaći uzorci presavijenih traka na neolitičkim glinenim posudama ili ukras sa šest jednakih krugova poredanih oko jednog središnjeg tako da se svaka dva susjedna dodiruju. Dizajn je i samog nakita često bio pod utjecajem religije pa su tako ukrasi na posudama posvećenima bogovima bili bogatiji. Smatra se i da su jednakostranični trokut, kvadrat (s četiri prava kuta) i pravilan šesterokut morali biti uočeni još davno u povijesti kao posebni slučajevi oblika ravnine što je svakako budilo interes i prva teorijska razmatranja u povijesti (Kadeřávek, 1992, prema, Scriba, Schreiber, 2015).

Potrebe ljudi u svakodnevnom životu stvorile su potrebu za osnovnim geometrijskim omjerima, no nisu tome pridavali veliku pažnju dok nisu počela prva logička razmišljanja kasnije u povijesti. Koristili su ih tako prilikom gradnje jaraka, brana, kuća ili mjerenja zemljišta. Gradnja kuća bila im je nemoguća bez poznavanja geometrijskih tijela poput kvadra, kocke, piramide ili valjka. Promatranjem zvijezda u prapovijesti ljudi su naslućivali prijelaz iz dvodimenzionalnih u trodimenzionalne oblike. Zvjezdano je nebo ljudima poticalo inspiraciju za osnovna geometrijska opažanja pokretima sjena. Promatrajući ih tijekom jednog dana ili godine i iscrtavajući putanju sjene na tlu, dobili su projekciju kretanja sunca (Scriba, Schreiber, 2015).

Među ranija otkrića povezana promatranjima Sunca pripada i otkriće iz grada Gosecka u Njemačkoj iz 1990.godine. Otkriven je niz koncentričnih kružnih jaraka za koje se otkrilo da potječu iz 4800. godine prije Krista. Sastoji se od dvostrukog prstena palisada s trojim vratima okrenutima prema sjeveru, jugoistoku (izlazak sunca 21. prosinca) i jugozapadu (zalazk sunca 21. prosinca). Vidljivo je da se udaljenost između palisada povećava oko 21. lipnja. Ovakav način određivanja, u čijem je korijenu vidljiva primjena i poznavanje geometrije, omogućio je poljoprivrednicima prije 7000 godina da pomoću sunca odrede najpovoljnije mjesto za sjetvu i žetvu tijekom godine. Ovo otkriće je arheološki istraženo te rekonstruirano, a smatra se najranijim opservatorijem do sada poznatim. Ovakvi kružni jarci korišteni su i u kulturalne svrhe čemu svjedoči najpoznatija građevina megalitske kulture, Stonehenge u Engleskoj. Podignuta je između 3. i 2. tisućljeća prije Krista, a smatra se opservatorijem te kulturalnim mjesto (Gericke, 1984, prema, Scriba, Schreiber, 2015).

Slika 5. Stonehenge: English Heritage, 2024

Izvor:https://www.english-heritage.org.uk/visit/places/stonehenge/things-to-do/stone-circle/

Proučavanjem se pokazalo da Stonehenge ne predstavlja samo korištenje znanja iz područja astronomije, već i geometrije

(Pitagorin teorem), iako su samo pretpostavke za tako rano korištenje navedenog poučka. Pored Stonehengea, nalazi se i Woodhenge, neolitski spomenik izgrađen oko 2500. godine prije Krista. Istraživanja govore kako je moguće dokazati kako je on izgrađen primjenom Pitagorina poučka. Sastoji se od šest koncentričnih ovalnih stupova okruženih obalom i jarkom, a izgrađeni su u skladu s izlaskom Sunca u ljetnom solsticiju. Naselje Mohenjo-Daro na području današnjeg Pakistana, dom je jedne od najstarijih naprednih civilizacija poznatih čovječanstvu, kulture Harappa, koje je staro gotovo kao i egipatsko kraljevstvo i Mezopotamija. Arheološkim istraživanjima utvrđeno je da nalazišta kulture Harappa sadrže opeke jednakih duljina stranica u omjeru 1:2:4, a ulice su im pratile obrise šahovske ploče, no nije još moguće sa sigurnošću tvrditi o ulozi geometrije u njihovoj kulturi. Ljudima se od davnina činilo očitim i da dijagonala dijeli kvadrat na pola kao i pravokutnik te da promjer dijeli krug na dva jednaka dijela. Prije pisanih tragova ljudi su bili svjesni tih odnosa i primjenjivali ih u praksi radi osnovnih egzistencijalnih potreba, a igra se svakako ne smije zanemariti jer u njoj također leži izvor interesa za bavljenje geometrijskim svojstvima i geometrijom kao takvom (Scriba i Schreiber, 2015).

Slika 6. Woodhenge: English Heritage, 2024

Izvor: https://www.english-heritage.org.uk/visit/places/woodhenge/

3.2. Razvoj geometrije i matematike u Egiptu, Mezopotamiji i Staroj Grčkoj

Geometrijsko znanje Egipta i Mezopotamije dobro je istraženo, obzirom da su obje civilizacije iz neolitskog doba i iza sebe su ostavile mnogobrojne pisane izvore. Geometrija je odigrala ključnu ulogu u starom Egiptu, a njena primjena bila je široko rasprostranjena u različitim aspektima života, od arhitekture do poljoprivrede i religijskih rituala. Povijesno gledajući, poznato je da je matematika kao znanost nastala radi potrebe rješavanja praktičnog problema prebrojavanja, stvari za razmjenu te brojanja dana u tjednu. Prema zaključcima brojnih antropoloških istraživanja koja su provedena kroz povijest do danas, nemoguće je pronaći kulturu koja nije imala razvijenu svijest o potrebi uvođenja brojeva. Imali su potrebu za označavanje, a primjenom brojeva bio cilj prebrojati skupinu, odnosno objekte koristeći prste, školjke ili kamenja. S vremenom se među ljudima razvila svijest o potrebi zabilježbe učinjenog brojanja, pa su brojeve (ili oznake) počeli zapisivati na pogodnim trajnim materijalima (Dadić, 1992).

Dadić (1992) ističe ornamente kao dokaz poznavanja geometrije i različitih geometrijskih oblika što se može zaključiti na temelju simetričnosti nacrtanih oblika, kao i njihove jednakosti, odnosno sličnosti, koje su uočene na posudama, ornamentima i drugim predmetima koji su se nekada koristili za pisanje.

Slika 7. Kartuša

Izvor: Arheološki muzej Zagreb: Pojmovnik egiptologije

Prikazan je uzorak kartuše, točnije ovalni okvir koji se koristio za centriranje, odnosno zatvaranje imena faraona ili nekog egipatskog božanstva. Karakteriziraju ga oblici kao što su linije, kvadrati i pravokutnici. U egipatskoj povijesti, nitko osim faraona nije imao tu privilegiju da napiše svoje ime u kartuši, koja je simbolizirala oblik zaštite faraona[11].

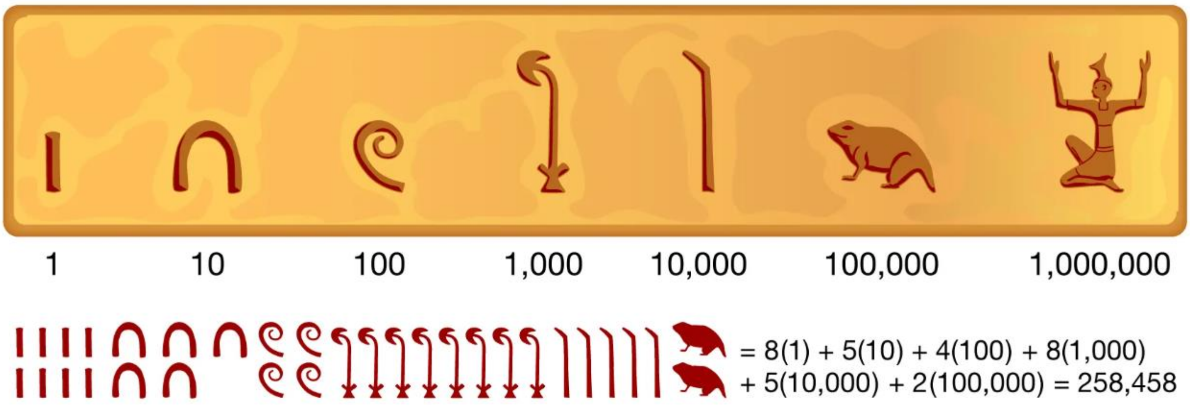
[11] *Arheološki muzej Zagreb: Pojmovnik egiptologije.* Pribavljeno 18.7.2024., sa: https://www.amz.hr/hr/edukacija/egiptologija/egiptologija/pojmovnik-egiptologije/#:~:text=Kartu%C5%A1a%20je%20duguljasti%2C%20a%20na,napisati%20svoje%20ime%20u%20kartu%C5%A1i.

Slika 8. Kanopa

Izvor: Povijest.hr: Kanope

Na Slici 8. prikazane su kanope, alabastrene ili keramičke posude s poklopcem u koju su Egipćani spremali mozak, srce, jetru i utrobu balzamiranih tijela. Ukrašavane su na različite načine, a na prednjim stranama nekih od gore prikazanih kanopa urezani su pravokutnici i kvadrati, ravne linije i različiti geometrijski simboli, za koje se pretpostavlja da imaju simbolično značenje[12].

Slika 9. Hijeroglifski znakovi brojeva



Izvor: Britannica: Mathematics in ancient Egypt (2024)

Egipćani, kao i Rimljani nakon njih, izražavali su brojeve prema decimalnoj shemi, koristeći posebne simbole za 1, 10, 100, 1000 i ostale. Svaki se simbol pojavio u izrazu za broj

[12] *Povijest.hr: Kanope*. Pribavljeno 18.7.2024. sa: https://povijest.hr/rijec-dana/kanopa/

onoliko puta koliko se vrijednost koju predstavlja pojavila u samom broju. Ova prilično glomazna notacija korištena je unutar hijeroglifskog pisma koje se nalazi u kamenim natpisima i drugim formalnim tekstovima, ali u dokumentima na papirusu pisari su koristili prikladnije skraćeno pismo, zvano hijeratsko pismo, gdje je, na primjer, 24 označavala pisanu matematiku. U takvom sustavu zbrajanje i oduzimanje svode se na brojanje koliko simbola svake vrste ima u numeričkim izrazima i zatim prepisivanje s rezultirajućim brojem simbola. Tekstovi koji su preživjeli ne otkrivaju koje su posebne postupke pisari koristili, ali za množenje su uveli metodu uzastopnog udvostručavanja.[13]

Jedan od najznačajnijih povijesnih lokaliteta je upravo Egipat. Primjerice, velike poplave rijeke Nil, koje su se događale više puta unutar jedne kalendarske godine su rezultirale time kako su se granice zemljišnih posjeda često brisale nakon čega su Egipćani morali ponovno razgraničiti poljoprivredna zemljišta. Ovaj proces zahtijevao je precizno mjerenje i korištenje osnovnih geometrijskih principa. Korištenjem užadi i drvenih klinova, geometri ili zemljomjeri su označavali granice polja i osiguravali da se zemljište pravilno podijeli. Nastanak geometrije kao matematičke discipline seže do otprilike 20. stoljeća prije Krista. Grčka riječ *mathemata* označavala je bilo koji predmet nastave, odnosno poučavanja te se postupno uvidjelo kako je pojam matematika potrebno ograničiti na točno određena područja znanja. Prema Pitagorejcima, pojam matematika vezao se uz opisivanje aritmetike i geometrije, radi čega se determinologija, odnosno obujam izučavanja matematike veže uz njihovu podjelu matematičkih znanosti (Majstorović, 2016:5) iako se, sami začetak geometrije, kao znanosti može povezati uz egipatsku i mezopotamijsku kulturu.

Kod Egipćana nalazimo i neke od prvih matematičkih ideja. Najstarija egipatska bilješka o broju potječe otprilike oko 3300. godine prije Krista. Stari su Egipćani imali razvijen decimalni sustav i svoje oznake za brojeve, a bili su vrlo vješti u zbrajanju, oduzimanju, množenju, dijeljenju, te računanju s razlomcima. Oni nisu imali namjeru razviti općenite matematičke metode i teorije, nego im je matematika služila pri rješavanju praktičnih problema koji su za njih imali primjenu u zemljoradnji, građevini, ekonomiji i religiji. Egipatska matematika se u potpunosti temelji na osnovi računanja, na brojanju i pojmu razlomka, a tome svjedoče dva papirusa (Jankov, 2011:11). Dva glavna izvora egipatske matematike su Rhindov i Moskovski papirus, vidljivi na Slici 10 i 11.

---

[13] Berggren, J. L. , Fraser, . Craig G. , Gray, . Jeremy John , Folkerts, . Menso and Knorr, . Wilbur R. (2024, August 29). mathematics. Encyclopedia Britannica. https://www.britannica.com/science/mathematics

Slika 10. Rhindov papirus

Izvor: Wikipedia: Rhind Mathematical Papyrus (2024)

Rhindov papirus sadrži zadatke koji se odnose na geometrijske probleme, koji su bazirani na pitanju količine zrna koja je posijana na površinama pravokutnog oblika i uskladištenog u bačvama koje su se tada koristile. Najznačajnije matematičko otkriće koje je istaknuto na Rhindovom papirusu je uvod za računanje površine kruga, koja se u Rhindovom papirusu istražuje pod zadatkom br. 50. Rhindov papirus zapravo je staroegipatski svitak s matematičkim tablicama i problemima koji je bio izvor mnogih informacija o egipatskoj matematici. Papirus je 1858.godine prije Krista, u ljetovalištu na Nilu, kupio Alexander Henry Rhind, od kuda mu i ime dolazi. Nerijetko se naziva i Ahmesov papirus u čast pisara koji ga je prepisao oko 1650. prije Krista.[14]

Slika 11. Moskovski papirus

Izvor: Jankov, 2011:12

Uz Rhindov papirus, značajan dokument u razvoju geometrije kao discipline je i Moskovski papirus, ujedno poznat i kao Golenischev papirus (prema ruskom egiptologu

[14] Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2008, July 17). Rhind papyrus. Encyclopedia Britannica. https://www.britannica.com/topic/Rhind-papyrus

Vladimiru Golenischevu). Jedan je od najstarijih poznatih matematičkih tekstova iz starog Egipta. Papirus datira iz perioda oko 1850. godine prije Krista, tijekom Srednjeg kraljevstva Egipta. Ovaj papirus je jedan od ključnih izvora našeg znanja o egipatskoj matematici i geometriji. Moskovski papirus dobio je ime po muzeju u kojem se danas čuva, Muzeju likovnih umjetnosti Puškin, u Moskvi. Papirus je krajem 19. stoljeća kupio ruski egiptolog Vladimir Golenischev, a kasnije je doniran muzeju. Moskovski papirus sadrži 25 matematičkih zadataka s rješenjima te zadatci pokrivaju razna područja, uključujući geometriju, aritmetiku i jednostavnu algebru. Papirus se posebno ističe zbog zadataka koji uključuju izračunavanje površina i volumena geometrijskih tijela. Jedan od najpoznatijih zadataka na papirusu je onaj koji se bavi izračunavanjem volumena krnje piramide. Ovaj zadatak pokazuje napredno razumijevanje geometrije u to doba.[15]

Moskovski papirus pokazuje da su Egipćani posjedovali napredna znanja u matematici, posebno u geometriji i aritmetici, iako su njihovi proračuni često bili bazirani na praktičnim potrebama poput mjerenja zemljišta i izgradnje. Kao jedan od najstarijih sačuvanih matematičkih tekstova, Moskovski papirus pruža detaljan i neprocjenjivo vrijedan uvid u rano matematičko razmišljanje i tehničke sposobnosti starog Egipta. Ovaj je papirus stoga ključan dokument za razumijevanje razvoja matematike u starom svijetu, pružajući nam uvide u mnoge vještine drevnih Egipćana. Egipćani su imali dobro razvijenu geometriju koja im je služila prilikom izgradnje piramida i hramova. Jedan od najpoznatijih primjera u ovom slučaju je zasigurno Keopsova piramida, prikazana na Slici 12.

[15] Wikipedia contributors. (2024, August 1). Moscow Mathematical Papyrus. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 13:49, September 3, 2024, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Moscow_Mathematical_Papyrus&oldid=1237964893

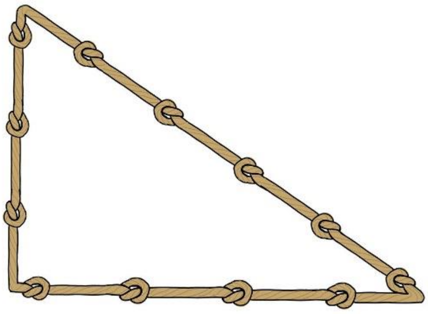
Slika 12. Keopsova piramida

Izvor: *Wikipedija: Keopsova piramida* (2024)

Keopsova piramida, ujedno poznata i pod nazivom „Velika piramida“ locirana je u Gizi, odnosno predgrađu Kaira, a i dan danas je u potpunosti sačuvana. Baza piramide nije savršen kvadrat, međutim, najveće odstupanje između stranica piramide (čija je duljina 230 metara) iznosi 20 cm, što odgovara 0,09%, čime se može zaključiti da je tadašnja upotreba geometrije u građevini bila na izuzetno zavidnoj razini (Janjanin i sur., 2017:1). Janjanin i suradnici ističu kako se u analizi izgradnje Keopsove piramide često ističu brojevi 3, 141 i 168, što ne smatraju slučajnošću, već smatraju da su upravo te brojke temeljne vrijednosti gradnje na kojima je bazirana izgradnje Velike piramide, jednog od sedam svjetskih čuda starog vijeka.
Dokaz je kako su Egipćani uvažavali geometrijske oblike kroz visoki razvoj građevinskog inženjerstva, a karakterizira ih i visoki stupanj društvene i političke organiziranosti. Jedina nepravilnost koja se može uočiti na ovoj građevini, koja je ujedno do izgradnje Eiffelovog tornja u Parizu bila najviša građevina na svijetu je neprimjetna konkavnost strana trokuta u sredini, a ta se nepravilnost može uočiti isključivo proučavanjem slika piramida iz zraka (Janjanin i sur., 2017:1)

Egipćani su se prilikom gradnje hramova i piramida koristili konopima koji su bili podijeljeni na dvanaest jednakih dijelova, 3+4+5=12, odnosno pitagorejskom trojkom koju vidimo na Slici 13 u nastavku rada, a ova metoda izračuna koristila se za konstrukciju pravog kuta.

Slika 13. Egipatski trokut s duljinom stranica 3, 4 i 5

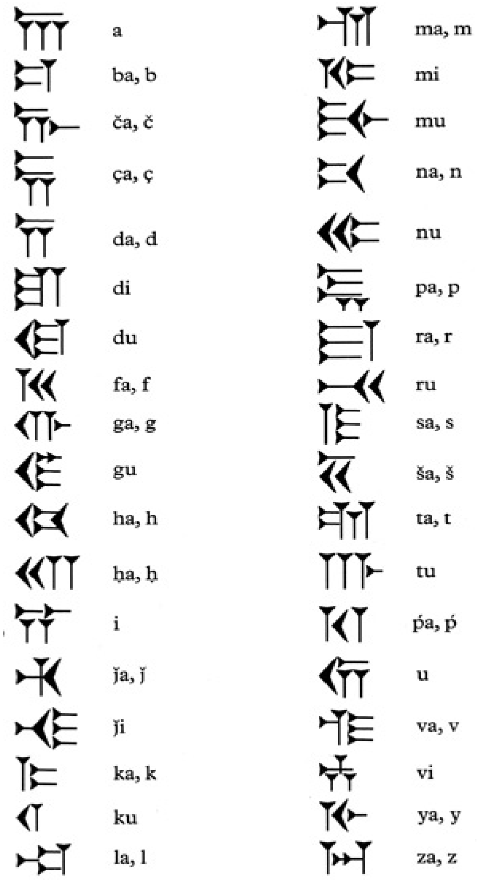


Izvor: https://www.wowstem.org/post/ancient-mathematics-triangles-in-egypt

Ujedno, Zebić (2014), ističe kako su Egipćani imali razvijen sustav računanja površine trokuta kao pola umnoška dviju kraćih stranica (što je vrijedilo samo u slučajevima računanja površine pravokutnog trokuta), dok su površinu pravokutnika računali kao umnožak duljina njegovih stranica (mjerna jedinica bio je *khet*).

Naselivši se na područje između dvije egipatske rijeke, Eufrat i Tigris, na područje Mezopotamije otprilike 2000 godina prije Krista, preuzeli su seksagezimalni sustav (s bazom 60) i klinasto pismo, pisano na glinenim pločicama još iz razdoblja Sumerana (prikazano na Slici 14).

Slika 14. Klinasto pismo



Izvor: Hrvatska enciklopedija: klinopis (2024)

Na Slici 14. prikazani su znakovi klinastog pisma. „Klinasto pismo ili pismo Sumerana, Babilonaca, Asiraca i susjednih zapadnoazijskih naroda, znakovi su koji se sastoje od ravnih crta urezanih u obliku klina. Pisalo se šiljkom od trstike ili kovine na pločicama od svježe gline, koje su se poslije pekle, a rjeđe na mekanom kamenu. Razvilo se najprije kod Sumerana kao slikovno pismo, tako što su se shematski prikazi predmeta i simboli pojmova sveli na karakteristične skupine klinastih poteza, koje su postajale sve jednostavnije i postupno se pretvorile označavanje slogova“.[16]

Na temelju svih arheoloških nalaza, utvrđeno je kako su se Babilonci pretežito koristili zašiljenu trsku kao sredstvo za pisanje, kojom su pisali po glinenim pločicama, a kasnije su ih pekli na Suncu. Upravo su te glinene pločice najznačajniji dokazi o stupnju razvijenosti geometrije u babilonskoj kulturi (Libl i sur., 2019:1).

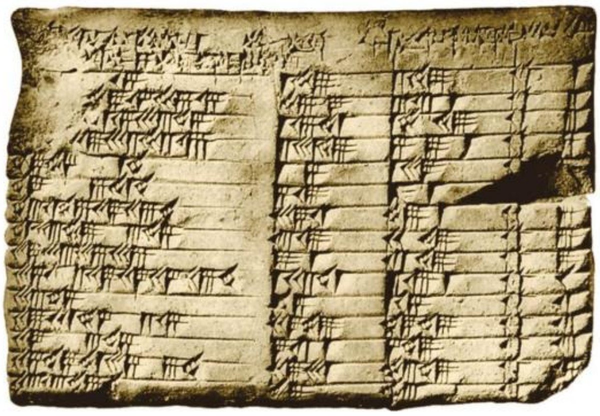
[16] klinopis. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. Pristupljeno 3.9.2024. <https://www.enciklopedija.hr/clanak/klinopis>

Babilonci su poznavali i Pitagorin teorem, a u nastavku se navodi jedan od primjera problema s kojima su se susretali. *4 je duljina i 5 dijagonala. Kolika je širina? Njena duljina nije poznata. 4 puta 4 je 16. 5 puta 5 je 25. Oduzmeš 16 od 25 i ostaje 9. Sto da uzmem da dobijem 9? 3 puta 3 je 9. 3 je širina* (Brückler, 2022:19).

U svom radu „Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him“, Ratner iznosi tezu prema kojoj se može zaključiti kako su Babilonci poznavali Pitagorin poučak, a obrazlaže ga time što je na pločici YBC 7289, pronađenoj između 1800. i 1600. godine prije Krista pronađen otisak iscrtanog kvadrata s trokutima unutar njega (Ratner, 2009:149).

Postavlja se pitanje zbog čega se, u tom slučaju, poučak naziva Pitagorinim. Odgovor na to pitanje može se pronaći u činjenici kako se znanje prenosilo s generacije na generaciju, iako su već i prije narodi poznavali ovaj poučak, Pitagora bio prvi koji je dokazao taj poučak pa se i naziva njemu u čast.

Slika 15. Pločica Plimpton 322

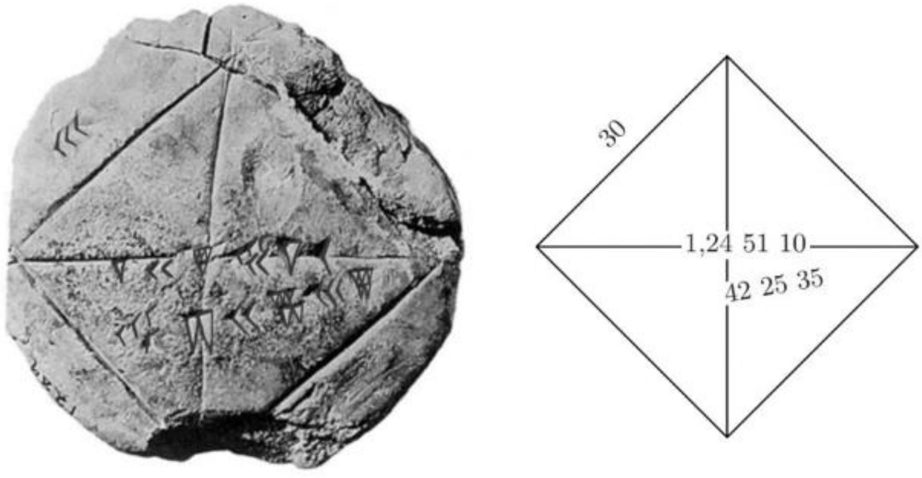


Izvor: Scriba, Schreiber, 2015:23

Pločica Plimpton 322 jedna je od sačuvanih glinenih pločica iz babilonske ere od prije 4000 godina. Pločica predstavlja jedan od prvih tragova nastave matematike, poznatu pod nazivom Plimpton 322. Ova glinena pločica, za koju se smatra da datira iz otprilike 1760. godine prije Krista, svoj naziv duguje kolekcionaru Georgeu Arthuru Plimptonu u čijoj zbirci na Sveučilištu u Columbiji se nalazi. Plimpton 322 pločica je veličine današnjeg kalkulatora, a sadrži jedan redak čistog teksta te tablicu brojeva s 4 stupca i 15 redaka (Libl. i sur., 2014: 1-3). Kako navode Libl i sur. (2014:3), ponajprije se smatralo kako je pločica Plimpton 322 „još samo jedan primjer babilonskog zapisnika“, međutim, na temelju zaključaka povjesničara O.

Neugebauera i A. Sachsa utvrđeno je da retci na pločici Plimpton 322 predstavljaju naročito interesantna svojstva, na koje se i usko nadovezuje Pitagorin teorem, do čijeg je otkrića došlo naknadno. Prema naknadno razvijenim povijesnim teorijama, na pločici Plimpton 322 predstavljena su i dva najznačajnija teorema babilonske matematike, a to su problem Pitagorinih trojki te problem recipročnih trojki (Libl i sur., 2014: 3-5).
Babylon tablet, odnosno babilonska glinena pločica koja datira iz 1900. godine prije Krista važna je zbog prikaza kvadrata kojemu duljina stranice iznosi 30, dok su na njegovim dijagonalama istaknute duljine 1, 24, 51 i 10, a prikazane su i na idućoj slici.

Slika 16. Babilonska glinena pločica



Izvor: Ostermann i sur., 2010:13

Babilonska glinena pločica prikazana na Slici 16. jasno ukazuje na razvijenost geometrije u Babilonu. Naime, kada se uzme u obzir prikaz na pločici, zaključuje se kako je pločica upravo dokaz da je Pitagorin teorem bio poznat, samo što je u to doba, bio prepoznat kao pravilo proporcionalnosti (Ostermann i sur., 2010:14).

Kada se govori o razvoju geometrije, odnosno matematike na području antičke Grčke, točnije područje današnje Grčke, zapadne Turske (Jonija) te druga područja na kojima je grčki jezik bio govorni, u literaturi se izdvaja tradicionalno prvim pravim matematičarem Tales iz Mileta (oko 624–527. prije Krista). On je svakako prvi poznati grčki filozof, znanstvenik i inženjer. Matematička tradicija mu pripisuje prve dokaze, no ne zna se je li išta dokazao, štoviše, ne zna se ni je li Tales išta pisao, a ako i jest, svi njegovi zapisi nestali su prije Aristotelovog doba (sredinom 4. st. prije Krista). Talesu se pripisuju teoremi temeljem biografije koju je napisao Diogenes Laertius i Proklovih komentara Euklidovih Elemenata.

Prema Proklu, Tales je iz Egipta prenio geometrijska znanja u Grčku. Diogenes Laertius mu pripisuje Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice (”Kut u polukrugu je pravi”) jer se spominje i legenda o navodnom Talesovom određivanju visine piramide, a pripisuju mu se i Talesovi teoremi o proporcionalnosti. Proklo pak Talesu pripisuje sljedeća četiri teorema:

1. Svaki promjer raspolavlja krug.

2. Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.

3. Vršni kutovi su jednaki.

4. KSK-teorem o sukladnosti trokuta.

No, za sva četiri navedena teorema nipošto nije sigurno da ih je Tales dokazao, moguće je da se kod njega još radilo samo o empirijski utvrđenim činjenicama (Brückler, 2011:21-22).

Uz navedene teoreme uz Talesa se danas vezuju i pretpostavke o izračunu visine piramide metodom omjera duljina sjena, određivanje udaljenosti broda od kopna i druge. Još jedan teorem koji se veže uz Talesa je Talesov teorem o proporcionalnosti koji glasi: *„Dva paralelna pravca na krakovima nekog kuta odsijecaju proporcionalne dužine“.* Iako je njegov teorem dokazao Euklid, teorem se naziva Talesovim teoremom jer ga je on prvi koristio pri mjerenju Keopsove piramide. U izučavanju matematike neophodno je istaknuti Talesov doprinos prema daljnjem razvoju same discipline jer je upravo on prvi postavio „logičke temelje“ pri dokazivanju teorema, odnosno iznio je zaključke da nije dovoljno samo opažati različite pojave, već da je potrebno, pri opažanju pojava, ujedno iznositi i zašto vrijedi primijećena pravilnost. Taj se zaključak smatra revolucionarnim za njegovo doba jer je do njega najvjerojatnije došlo primjenom pokusa kao dokazne metode kao induktivne metode zaključivanja. Jedna je ključnih prekretnica koja postaje sve izraženija činjenica kako se matematika sve više počela izdvajati od drugih predmeta proučavanja, čime se počela promicati u samostalnu znanost (Kralj, 2014:5). Primjena pokusa kao načina dokazivanja dobivenih rezultata govori o tome kako se zaključak, umjesto da se donese na temelju starih saznanja, odnosno vjerovanja donio na temelju istraživanja, odnosno pokusa, čime je vjerojatnost ispravnosti podataka značajno veća nego što bi bila ukoliko je rezultat dobiven na temelju vjerovanja (koja su se mogla dokazati neispravnima). Također, shodno pojašnjenoj promjeni u načinu viđenja, odnosno razmišljanja pojedinca, ovakav način proučavanja smatra se revolucionarnim, budući da je riječ o promjeni koja je bila potpuno nova i drugačija u odnosu na ustaljene obrasce ponašanja.

Brückler (2022:48) uz Talesa, jednog od začetnika prvih apstraktnih matematičkih pojmova, izdvaja Pitagoru, Euklida i Arhimeda te njihov doprinos u razvoju geometrije. Uz Pitagoru je Pitagorin teorem koji glasi: *„Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama."* O značaju Pitagorinog poučka, kao i utjecaja na razvoj geometrije najbolje svjedoči sljedeći Proklusov citat, kojeg su Ostermann i suradnici izdvojili u svojem djelu: „*If we listen to those who wish to recount ancient history, we find some of them referring this theorem to Pythagoras and saying that he has sacrificed an ox in celebration of his discovery*" (2010:14). Pitagorin teorem danas je jedan od najznačajnijih matematičkih otkrića koji je neizostavni dio nastavnog sadržaja matematike osnovnih škola.

Euklid, grčki matematičar (330. - 275. godina prije Krista), u svom djelu „Elementi" dokazao je Talesov teorem o proporcionalnosti, dok su, u istom djelu ujedno navedeni i istaknuti ostali Talesovi teoremi. Najznačajnije je Euklidovo djelo *Elementi*, a u njemu se iznosi niz matematičkih teorema koje on nije samostalno otkrio, već se radi o teoremima koji su prethodno istraživani u grčkoj povijesti, kao što je Pitagorin poučak. Ono zbog čega se Euklida smatra jednim od najznačajnih matematičara starog vijeka jest činjenica da je on sve teoreme povezao logičkim slijedom, a sve s ciljem kako bi pojasnio da svi teoremi slijede pravilo pet jedinstvenih aksioma. Djelo je objavljeno oko 300. godine prije Krista, a njegov je značaj u tome što je upravo u Elementima izložena elementarna geometrija na aksiomatskoj osnovi, čime je upravo to djelo postalo nenadmašan uzor stroge dedukcije pa ne čudi da je do polovice 18. stoljeća ovo djelo bilo osnovni udžbenik za podučavanje geometrije (Euklid i njegovi elementi, n.d.). Djelo Elementi sastoji se od 13 knjiga. Prva knjiga postavlja temeljne postavke geometrije ravnine, uključujući tri slučaja u kojima su trokuti sukladni, razne teoreme koji uključuju paralelne pravce, teorem o zbroju kutova u trokutu i Pitagorin poučak. Za drugu knjigu se obično kaže da se bavi geometrijskom algebrom jer većina teorema sadržanih u njoj ima jednostavnu algebarsku interpretaciju. Treća knjiga istražuje kružnice i njihova svojstva te uključuje teoreme o tangentama i upisanim kutovima. Četvrta se knjiga bavi pravilnim mnogokutima upisanim u kružnice i opisane oko njih, dok se u petoj knjizi pojašnjava aritmetička teorija proporcija. U šestoj se knjizi primjenjuje teorija proporcija na geometriju ravnina i sadrži teoreme o sličnim figurama. Sedma knjiga sadrži elementarnu teoriju brojeva: npr. prosti brojevi, najveći zajednički nazivnici itd. Osma knjiga govori o geometrijskom nizu, dok deveta knjiga sadrži razne primjene rezultata iz prethodne dvije knjige i uključuje teoreme beskonačnosti prostih brojeva, kao i o zbroju geometrijskog niza. Deseta knjiga pokušava klasificirati nemjerljive (tj. iracionalne) veličine koristeći takozvanu "metodu iscrpljivanja", drevnu preteču integracije. Jedanaesta knjiga bavi se temeljnim postavkama trodimenzionalne geometrije. Dvanaesta knjiga izračunava relativnu volumena stožaca, piramida, cilindra i kugli metodom iscrpljivanja, a zadnja, trinaesta, knjiga istražuje pet takozvanih Platonovih tijela (Fitzpatrick, 2007:1).

Važnost Euklidovih Elemenata je u činjenici kako je ovo djelo temelj razvoja strogo logičkog zasnivanja matematike i bilo koje druge aksiomatske teorije. Naime, dva osnovna problema koja se navode u Elementima problem su paralela i problem potpunosti aksiomatike euklidske teorije, a njihova rješenja predočena su krajem 19. stoljeća, nakon cijelog niza bezuspješnog rješavanja od strane iznimnih matematičara. O važnosti Euklidovih Elemenata govore i riječi prof. dr. Vladimira Voleneca: „Euklidovi su Elementi skup knjiga od povijesnog i kulturnog značaja, ne samo za matematiku nego i za cjelokupno ljudsko znanje, jedan od najviših vrhunaca u povijesti znanosti i dugogodišnji uzor, fantastično postignuće jednog doba, jedne škole, jedne civilizacije, jednog svjetonazora, postignuće koje je ostavilo svoj duboki trag do današnjih dana, bitno utječući i određujući budućnost matematike, ali i drugih znanosti. Za svaki je kulturni narod od važnosti da posjeduje prijevod Euklidovih Elemenata na svome jeziku, kao iskaz vlastite kulturne razine, ali i nužne potrebe upoznavanja s Euklidovom riječi najšire znanstvenočitalačke publike“ (ELEMENTI I-VI, 2024).

Arhimed, grčki fizičar i astronom (287. – 212. godine prije Krista), ujedno i jedan od najvećih matematičara starog vijeka prvi je odredio približnu vrijednost broja „Pi“, odnosno interval unutar kojeg se nalazi vrijednost tog broja. Jedan je od grčkih matematičara čiji je utjecaj u razvoju matematike neizmjeran, a njegov rad, kao i djela prepoznata su i u brojnim drugim područjima, kao što su fizika, inženjerstvo i slične discipline. Uz to što je prvi odredio približnu vrijednost broja „Pi“, On je u razvoju matematike prepoznat po metodi ekshaustije ili metodi iscrpljivanja, „metodi izračunavanja površine nekog oblika pri kojoj se u oblik ubacuje niz poligona čije površine konvergiraju prema površini cijelog oblika“ (Metoda ekshaustije, 2024). Ova metoda potvrđuje činjenicu kako je Arhimed bio izvanredan u rješavanju složenijih geometrijskih problema, pritom smatrajući da je prikladan način za njihovo rješavanje razdvajanje problema na manje složenije dijelove.

Geometrija u Grčkoj počela se bazirati sve više na deduktivnoj metodi, što bi značilo da su svi zaključci izneseni na temelju prethodno utvrđenih rezultata, a koja je bazirana na aksiomima (grč. *Aksios)*, što bi u prijevodu na hrvatski jezik značilo „bez“. Naime, aksiom predstavlja „temeljnu istinu koja se ne dokazuje a služi kao osnova matematičke teorije“ (Brückler, 2022).

Razvoj geometrije kao discipline pokazat će se ključnim u razvoju stereometrije, kasnije i kartografije, a začetci njihova razvoja vidljivi su u poliedrima, čijim su se proučavanjem bavili upravo stari Grci. Uz navedeno, prilikom proučavanja razvoja geometrije, odnosno matematike kod Starih Grka, važno je spomenuti kako su Grci tijekom 8. stoljeća prije Krista počeli razvijati svoju abecedu s 24 slova, prethodno ju preuzevši od Feničana (Starogrčka matematika prije Platona, n.d.). Podučavanje matematike u Grčkoj bilo je drugačije nego u drugim zemljama. Naime, baziralo se na odvojenom podučavanju aritmetike i geometrije, odnosno ti su se predmeti izučavali kao zasebni predmeti. Predmet aritmetike dijelio se na dvije različite forme, od kojih je jednu formu izučavao srednji stalež i zanatlije, a temelj njena izučavanja bilo je računanje. S druge strane, visoki stalež učio je drugu formu, odnosno znanost o brojevima. Viši stalež se izučavao kod kuće, a podučavali su ih roditelji ili obrazovani robovi. Temelj njihova učenja bila su slova, glazba, gimnastika te mali dio aritmetike, tj. geometrije. Oni koji su se odlučili za daljnje školovanje u području matematike, upisivali su akademije čiji su osnivači bili Platon, Aristotel, Pitagora i drugi grčki matematičari. Jednu od škola koja se većinski bavila izučavanjem geometrije utemeljio je Pitagora, 518. godine pr. Krista u Krotonu. Jedna od ključnih misli vodilja koja se kasnije pokazala krucijalnim u razvoju kartografije je misao da se sve na svijetu, pa i zemlja, može prikazati matematički. Za razliku od Pitagore čija se škola bavila proučavanjem geometrije, u Platonovoj školi su se obrazovali budući političari i državnici Atene, a o značaju matematike kao znanosti govori i činjenica kako je Platon zagovarao da svi učenici prvih deset godina uče isključivo matematiku, budući da je to način na koji se vježba um te se na taj način razumiju pojave koje ne mogu biti fizički pokazane. Na slični model poučavanja kakav je imao Pitagora, nadovezao se i Aristotel, u čijoj je školi ipak fokus bio ponajviše na prirodnim znanostima, a model poučavanja bazirao se na okupljanju učenika koji bi razgovarali o pojedinim temama i postavljali pitanja učiteljima, nakon čega bi slijedila grupna diskusija (Čuljak, 2013: 1-3).

Grčki su matematičari značajno doprinijeli razvoju geometrije, ponajprije kroz razvoj ključnih geometrijskih postulata. Svaki od navedenih teoretičara, počevši od Talesa pa do Pitagore i Euklida i brojnih drugih dao je neizmjerno bitan doprinos razvoju geometrije, kao i brojnih drugih disciplina koje su se paralelno razvijale. Rješavanje starogrčkih matematičkih problema, kao što su duplikacija kocke, kvadratura kruga te trisekcija kruga doprinijeli su nizu novih otkrića te velikog razvoja tadašnje matematike (Čuljak, 2013:33). Zbog impresivne logičke strogosti prilikom proučavanja matematičkih teorema, izučavanja matematike kroz fokus na geometrijske aspekte te vješto predstavljanje rezultata dobivenih proučavanjem pojedinog matematičkog problema značajni su razlozi zbog koji je utjecaj Grka na razvoj geometrije neizmjeran (Allman Johnston, G., 2008).

3.3. Razvoj geometrije kroz povijest matematike u srednjem vijeku

Povijest matematike u srednjem vijeku obuhvaća razdoblje od pada Zapadnog Rimskog Carstva 476. godine do otkrića Amerike 1492. godine. Euklidovi „Elementi“ prijevodom Severina Boetija, posljednjeg velikog filozofa antike, postali su dostupni europskim znanstvenicima čime postaju temelj geometrijskih istraživanja u razdoblju srednjeg vijeka. Kao jedno od najznačajnih dijela u pogledu razvoja geometrije, izdvaja se enciklopedija *„O vjenčanju Merkura i filologije i o sedam slobodnih umijeća“* (*De nupiis Mercurii et Philologiae et de septem artibus liberalibus*) autora Martianusa Capelle. Jedan dio rada posvećen je izučavanju geometrije, dok je drugi dio namijenjen izučavanju aritmetike. Uz Capellu, koji je živio na području Italije, ističe se Boetije, budući da su zaključci tih znanstvenika doveli ka unapređenju postojećeg školskog sustava u Italiji, a zatim i na području cijele Europe. Naime, postojeći školski sustav tog razdoblja bio je utemeljen na platonizmu i neoplatonizmu kako bi se geometrija, aritmetika, astronomija i glazba spojile u zaseban sustav, nazvan *kvadrivij* (Đikić, 2013:5).

Uz Capellu i Boetija, kao jedan od najznačajnijih znanstvenika tog razdoblja ističe se Alcuin iz Yorka, koji je, zajedno s Karlom Velikim podučavao pučanstvo geometriju, aritmetiku i astronomiju. U djelu *Problemi za izoštravanje uma* uključene su 53 zagonetke, dosjetke i trik – pitanja, čiji je Alcuin autor, a dan danas ta pitanja predstavljaju najraniju europsku kolekciju matematičkih i logičkih zagonetki, a jedna od zagonetki navodi se i u nastavku.

Jedan čovjek, noseći vrećicu s kupusom, dolazi do obale rijeke zajedno sa vukom i kozom. Čamac je prilično mali, tako da čovjek može prevesti ili samo vuka, ili kozu, ili vrećicu sa kupusom. Naravno, on ne smije ostaviti na bilo kojoj obali kozu i kupus, a također ni vuka i kozu zajedno. Kako će čovjek, sa što manje prijelaza preko rijeke, prebaciti vuka, kozu i kupus na suprotnu stranu (Sruk, 2022:222).

Istaknuti prenositelji znanja grčkih matematičara srednjovjekovnim europskim matematičari su arapski matematičari. Imali su i sami značajne doprinose razvoju matematike. Njihove pak radove i prijevode proučavaju Adelard iz Batha, Gerbert iz Aurillaca te Savasorda (Đikić, 2013: 7-8).

Adelard iz Batha (12. stoljeće), koji je preveo astronomske tablice (s arapskog jezika) te Euklidove Elemente, a uz Elemente, u tom razdoblju prevedena su i druga djela arapskih matematičara koja su bazirana na arapskom tipu matematike.

Gerbert iz Aurillaca (940. – 1103.), koji je za života stekao znanje o indoarapskim brojevima te je pisao o aritmetici, geometriji i drugim matematičkim predmetima. Njegovo najpoznatije djelo je *Pravila računanja na abaku (Regulae de numerorum abaci rationibus).* Savasorda, odnosno Abraham bar Chiia, židovski je učenjak iz 11. stoljeća autor je enciklopedije posvećene aritmetici, geometriji i matematičkoj geografiji.

Dugo se krivo smatralo da se matematika svijeta pod dominacijom Arapa isključivo temeljila na prevođenju i prijenosu znanja grčkih i istočnih matematičara. Taj svijet preuzeo je od Indijaca pozicijski dekadski brojevni sustav i algoritme računanja te ih unaprijedio, kao i računanje primjerice vrijednosti sinusa i kosinusa. Jedina razlika između arapskog i indijskog shvaćanja geometrije bila je u tome što je geometrija kod Arapa bila isključivo deduktivne naravi te da su algebru temeljili na strogom geometrijskom dokazu, kao što je bio slučaj i u Staroj Grčkoj (Đikić, 2013:21). Đikić (2013:47) ističe kako je srednjovjekovna europska matematika značajno kaskala za matematikom Bliskog istoka te da je razlog za kašnjenjem potrebno tražiti u kršćanstvu. Navodi da je kršćanstvo srednjeg vijeka pretežito odbacivalo sve teze koje se smatralo protivnima kršćanskoj teologiji, odnosno da su razne teze i znanja dobivala „poganski predznak“ u samom pokušaju njihova utemeljenja.

Indija i Bliski istok imali su prevlast u razvijanju matematike do polovice srednjeg vijeka, kada se situacija počela značajno popravljati na europskom području. S vremenom, Europa je ponovno uspostavila primat u razvoju matematike, a to ponajprije zahvaljujući Leonardu Fibonnaciju iz Pise. Naime, Fibonacci je smatran najvećim i najproduktivnijim matematičarom srednjeg vijeka iz razloga što je, po završetku putovanja u Alžir i susjedne zemlje gdje je boravio s ocem, diplomatom i trgovcem, objavio djelo *Knjiga o abaku* (1202. godina). Tom knjigom uveden je indoarapski pozicijski sustav i riješen niz kombinatornih problema.

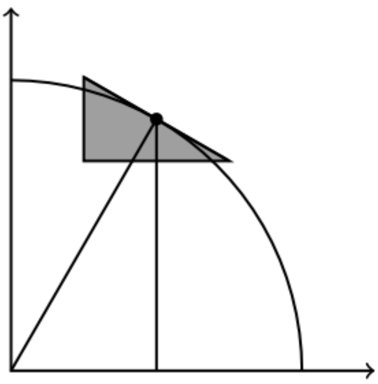
3.4. Razvoj geometrije kroz povijest matematike od 17. do 20. stoljeća

Pierre de Fermat (1601. – 1665.), matematičar je koji se u svom radu doticao teorijom brojeva, ali je istovremeno djelovao kao jedan od utemeljitelja teorije vjerojatnosti i analitičke geometrije. Upravo je u geometriji značajan njegov doprinos, iako je otkriven tek poslije njegove smrti (nakon 1679. godine) (Brückler 2022:144-145).

Pascalov trokut jedan je od poznatih geometrijskih teorema koji je razvijen u analiziranom razdoblju, čija su obilježja opisana u djelu *Le Trait´e du triangle arithm´etique* iz 1654. godine. Pascala je naslijedio njegov sin, Blaise Pascal (1623. – 1662.) koji se je posebno interesirao za geometriju. Iako je njegov otac naredio da mu se sin ne smije baviti matematikom sve dok ne navrši punih petnaest godina života, njome se počeo baviti s nepunih 12 godina, kada je već došao do zaključka kako zbroj kutova u trokutu odgovara jednaka dva prava kuta. Jedan od njegovih najznačajnijih izuma je Pascaline, odnosno mehanički kalkulator, koji je mogao zbrajati i oduzimati velike brojeve (Brückler, 2022:144-145). Kada sagledavamo Pascalov doprinos u razvoju matematike, bitno je spomenuti kako je Pascal začetnik teorije vjerojatnosti - grane matematike koja proučava odnose među slučajnim događajima, a pojasnio ju je u djelu Geometrija slučajnosti (Teorija vjerojatnosti, n.d.). Od mlade dobi (šesnaest godina) izučavao je projektivnu geometriju, granu geometrije koja proučava ona svojstva geometrijskih tijela koja ostaju sačuvana pri svakoj projektivnoj transformaciji (Projektivna geometrija, n.d.), a upravo je jedno od temeljnih načela projektivne geometrije i Pascalov teorem o mističnom heksagonu (Brückler, 2022:119-120).

Važan je i Pascalov karakteristični trokut. Proučavajući luk kružnice, Pascal je definirao karakteristični trokut kao pravokutni trokut „kojem je hipotenuza dio tangente oko promatrane točke, a katete su paralelne koordinatnim osima“.

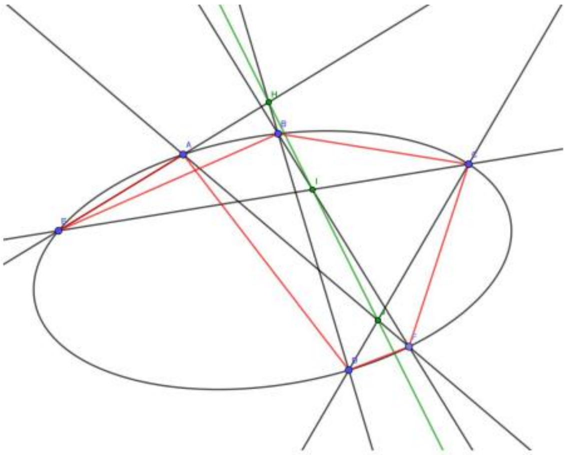
Slika 17. Pascalov karakteristični trokut



Izvor: Bruckler, 2022:146

Uz Pascala se veže i njegov teorem o mističnom heksagramu, koji glasi *„Ako je u koniku upisan heksagram ABCDEF, onda su sjecišta tri para nasuprotnih stranica AE s BD, BF s CE i AF sa CD kolinearni“.*

Slika 18. Pascalov teorem o mističnom heksagramu



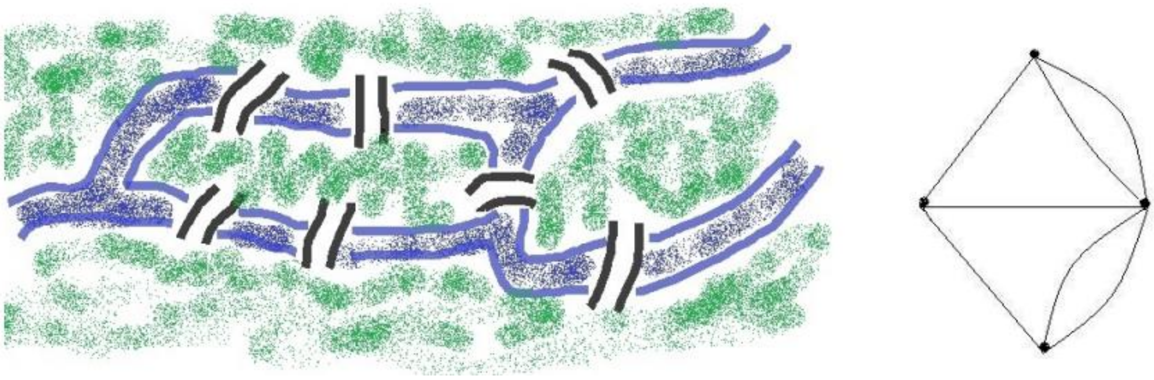
Izvor: Brückler, 2022: 146

Po utemeljenju, odnosno dokazivanju ovog teorema, Pascal je imenovan suutemeljiteljem projektivne geometrije. Na njegov rad nadovezao se Girard Desargues, francuski matematičar (1591. – 1661.) koji se ipak, na temelju svojeg daljnjeg rada smatra idejnim začetnikom projektivne geometrije, koja se nije značajnije razvijala sve do 19. stoljeća (Brückler, 2022:146). U samom razvoju geometrije od 17. do 20. stoljeća, značajan doprinos dali su i hrvatski znanstvenici, od kojeg je potrebno spomenuti Marina Getaldića (1568. – 1626. god.). Njegovo objavljeno djelo *Variorum problematum collectio* u 1607. godini objedinjuje 42 geometrijska zadatka s popratnim rješenjima. Brückler navodi, iako ne potvrđuje, kako je lako moguća činjenica kako su Getaldićeva djela iz 16. stoljeća, uključujući i *Variorum problematum collectio* utjecala na Descartesa, koji se smatra ocem analitičke geometrije (Brückler, 2022:147).

René Descartes (1596 – 1650), francuski matematičar, u 17. stoljeću uveo je koordinatni sustav u ravnini, bijekciju izmeĐu skupa točaka euklidskog prostora i skupa trojki realnih brojeva (koordinata). Tako je nastala analitička geometrija, grana matematike u kojoj se geometrijski problemi rješavaju algebarskim metodama. Aksiomi euklidske geometrije mogu se računski (analitički) modelirati u terminima manipulacija s koordinatama. U devetnaestom stoljeću otkriveni su novi takozvani neeuklidski tipovi geometrije kao što je geometrija Lobačevskog i Riemannova geometrija koja je dio suvremene diferencijalne geometrije (Moses, Richardson, 1966, prema Tomić, 2020).

Leonhard Euler (1707.-1783.) koji je svojim radom doprinio svim postojećim matematičkim disciplinama, a neki od njegovih radova, posebice *Introductio in analysin infinitorum* iz 1748., postali su i temelj za razvoj novih matematičkih utemeljenja. Uz brojna značajna djela koja je objavio, Euler će u povijesti razvoja matematike biti poznat i kao utemeljitelj topologije, odnosno njene poddiscipline, teorije grafova. Jedan od temeljnih problema s kojim se Euler bavio prilikom izučavanja topologije bio je problem mostova u gradu Kalinjingradu. Eulerovo područje istraživanja bilo je podosta široko, a rezultati i zaključci do kojih je došao za svog života postavili su temelje moderne matematike (Singh i sur., 2016:67).

Slika 19. Mostovi u Kalinjingradu



Izvor: Brückler, 2022:173

Euler je proučavao može li se Kalinjingrad obići na način da se svaki od njegovih sedam mostova pređe isključivo jedan put te se na kraju vrati na polazišnu točku. Pri izučavanju ovog pitanja, Euler je zaključio da rješenje ovog pitanja ne leži niti u duljinama niti u kutovima gradnje tih mostova, već da je odgovor povezan s isključivom povezanosti mostova, stoga ga se i dan danas smatra ocem topologije. Razvijajući matematiku potrebnu za rješavanje problema, Euler je 1735. godine predstavio svoj rad pod nazivom “Solutio problematis ad geometriam situs pertinetis” u kojem je izložio matematičke osnove teorije grafova. U tom je radu postavio opće pitanje problema: Može li se utvrditi je li moguće prijeći svaki most točno jednom ili ne? (Mayoral – Villa, n.d.).

Nakon svoje analize i razvoja ove nove matematike, otkrio je da ovaj problem nema rješenja, zapravo je zaključio da (Mayoral – Villa, n.d.) ako postoji više od dvije kopnene mase s neparnim brojem mostova, onda je takav put nemoguć; ako postoje točno dvije kopnene mase, a broj mostova je neparan, tada put postoji ako počinje u jednoj od dvije neparne kopnene mase; ako ne postoje regije s neparnim brojem kopnenih masa, tada se staza može postići počevši od bilo koje regije.

Hrvatski znanstvenik, Josip Ruđer Boškovića, mnogo je doprinio razvoju primijenjene matematike. Uz razvoj metode za izravnavanje pogrešaka koju je razvio, Bošković se zanimao za sfernu trigonometriju i njenu primjenu u astronomiji (Brückler 2022:173). Njegovim najvažnijim djelom smatra se *Teorija prirodne filozofije,* u kojem su postavljena načela teorije prirodne filozofije J.R. Boškovića. Temeljni princip njegove filozofije je kontinuiranost, a njegova teorija razvijena je geometrijski. Jedno od njegovih najvažnijih teorema je taj da je potrebno razlikovati zamišljeni od fizičkog prostora. Bošković postavlja razliku između ta dva prostora na sljedeći način: zamišljeni prostor kontinuiran je i beskonačan, dok je fizički prostor realan te ne postoji bez objekata u njemu (Poljak i sur., 2011:28).

Johna Wallis je u svom radu proučavao otkriće geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva, odnosno kompleksne ravnine, koju je prvi opisao Caspar Wessel (1745. – 1818.). Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.) i Jean-Robert Argand (1768. – 1822.) poznati su po svom nezavisnom radu koji je rezultirao donošenjem osnovnih teorema algebre (Brückler, 2022:189-203).

Johann Benedict Listing, kojeg je podučavao Carl Friedrich Gauss, prvi je koristio izraz „topologija“ (koji se nije koristio do 1849. godine, već je do tada korišten termin *analysis situs*). Ujedno, Listing je prvi opisao Möbiusovu traku (otkrivenu 1858. godine), nazvanu po Augustu Ferdinandu Möbiusu. Slijedom toga, utemeljiteljima geometrijske topologije smatraju se Listing, Gauss i Möbius. Uz njih, tu je i Felix Klein (1849. – 1925.), koji je kroz svoj rad utvrdio da postoje tri podvrste dvodimenzionalne geometrije.

„Potrebno je spomenuti i novije geometrije, neeuklidske geometrije. To su svi geometrijski sustavi koji se izborom aksioma razlikuju od euklidske geometrije kao primjerice projektivna, nearhimedska i brojne druge. Najčešće se pod neeuklidskom podrazumijeva geometrija Lobačevskoga ili hiperbolička geometrija te sferna i eliptička geometrija. Gledamo li povijest to su bile prve i najznačajnije geometrije toga tipa. Aksiomatske osnove geometrije Lobačevskoga razlikuju se od euklidske aksiomatike jedino po tom što je peti Euklidov postulat, aksiom o paralelama zamijenjen drugim. On glasi da zadanom točkom prolaze barem dva pravca ravnine koji ne sijeku zadani pravac te ravnine, a glasio je ako su zadani pravac i točka izvan njega, tada postoji jedinstven pravac koji prolazi tom točkom i paralelan je zadanomu pravcu. Ova je pretpostavka prouzročila brojne posljedice kao da zadanom točkom dane ravnine prolazi beskonačno mnogo pravaca koji ne sijeku dani pravac u njoj; zbroj kutova trokuta manji je od dva prava kuta; trokut je određen svojim kutovima pa zato ne postoje slični nesukladni trokuti. Geometrija Lobačevskoga otkrivena je kao rezultat uvjerenja da peti Euklidov postulat nije neovisan o ostalim postulatima i aksiomima, te mnogo uzaludnih pokušaja da se to dokaže u 2000 godina. Duboko uvjeren da je peti postulat, suprotno vjekovnoj hipotezi, ipak pravi aksiom neovisan o ostalima, Nikolaj Ivanovič Lobačevski, a istodobno s njim i Carl Friedrich Gauss i János Bolyai, izgradio je geometrijski sustav koji se zasnivao na pobijanju petog Euklidova postulata, a time je nastala neeuklidska geometrija“ (Ziegler, 1998:5-7).

Otkrićem hiperbolične geometrije problem neovisnosti petog postulata je riješen. Nije ga moguće dokazati iz ostalih aksioma jer postoji alternativna geometrija ravnine u kojoj su svi ostali aksiomi ispunjeni, a peti postulat ne vrijedi. Dakle, Euklid je bio u pravu kad je uvrstio kompliciranu tvrdnju o paralelama medu postulate.[17]

„Aksiomatike sferne geometrije, odnosno eliptičke, znatno razlikuju od euklidske zbog toga što je zahtjev da se u njoj svaka dva pravca iste ravnine sijeku. Geometrija na kuglinoj plohi najzorniji je model sferne geometrije, a ako se u geometriji na kugli nađu dijametralne točke, nastaje jedan od najznačajnijih modela eliptičke geometrije. Osnovne su značajke tih geometrijskih sustava primjerice da je duljina pravca konačna, zbroj kutova trokuta veći je od dva prava kuta, površina trokuta proporcionalna je s njegovim ekscesom. Sferna i eliptička geometrija često se nađu pod drugim imenima poput Riemannovim geometrijama, prema Georgu Friedrichu Bernhardu Riemannu, koji je prvi uočio mogućnost njihova postojanja. Sve su te geometrije kasnije shvaćene posebnim slučajem jedne teorije zahvaljujući njegovih radova. Neeuklidske geometrije potaknule su širenje diferencijalne geometrije na višedimenzionalne prostore“.[18]

Prilikom analiziranja povijesnog razvoja geometrije, odnosno matematike, za povijesni razvoj u srednjem vijeku važno je istaknuti činjenicu kako se, paralelno s razvojem geometrije

[17] Krcadinac, V. NEEUKLIDSKA GEOMETRIJA. https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/neg/neg-skripta.pdf

[18] neeuklidske geometrije. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. Pristupljeno 3.9.2024. <https://www.enciklopedija.hr/clanak/neeuklidske-geometrije>

počela razvijati i kartografija - djelatnost koja se bavi prikupljanjem, preradom, pohranjivanjem i upotrebom prostornih informacija te posebno vizualizacijom kartografskog prikaza (Definicija i zadaci kartografije, 2024). Teorija kartografskih projekcija utemeljena je na temeljnim zaključcima brojnih disciplina, primjerice ravnoj i sfernoj trigonometriji, diferencijalnoj geometriji, diferencijalnom i integralnom računu te na metodama numeričke analize. Postupni razvoj geometrije uvelike je utjecao na razvoj znanosti kartografije, budući da je razvoj geometrije utjecao na evoluciju kartografskih tehnika, razvoj različitih modela projekcija i načina njihove primjene, koordinatni sustav i orijentaciju, načine mjerenja i preciznost pri provedbi, kao i razvoj digitalne kartografije. Slijedom toga, važno je naglasiti kako je razvoj geometrije utjecao na razvoj brojnih drugih znanstvenih disciplina, dok je konkretno geometrija unaprijedila način čovjekova razmišljanja o razumijevanju prostornih odnosa i načina na koji se mogu prikazati (Lapaine, 2021:2). Geometrija je zaista jedna od najstarijih grana matematike. Prošla je dug i složen put razvoja. Od praktičnih potreba drevnih civilizacija do apstraktnih koncepata moderne matematike, geometrija je uvijek bila pokretač ljudske znatiželje i inovacija. Njezini su temelji postavljeni još u antici, a kroz stoljeća se razvijala i proširivala, utjecavši na brojne znanosti i tehnologije. Povijest geometrije svjedoči o neprestanom traganju čovjeka za razumijevanjem svijeta oko sebe. Od empirijskih opažanja i praktičnih primjena u arhitekturi i mjerenju zemljišta, geometrija se razvila u rigoroznu deduktivnu znanost, temeljenu na aksiomima i teoremima. Njezin utjecaj proteže se daleko izvan granica matematike, oblikujući razvoj fizike, astronomije, umjetnosti i mnogih drugih disciplina. Geometrija je ne samo alat za rješavanje problema, već i odraz ljudske kreativnosti i sposobnosti apstraktnog mišljenja. Merzbach i Boyer (2011), navode da je do kraja devetnaestog stoljeća bilo je jasno da se ne samo sadržaj matematike, ali i njezin institucionalni i međuljudski okvir radikalno promijenio od ranih 1800-ih godina. Osim rasta broja matematičkih časopisa i akademskih odjela tijekom stoljeća, razmjena matematičkih ideja uvelike je unaprijeđena u različitim zemljama osnivanjem nacionalnih matematičkih društava i međunarodnih susreta matematičara, od kojih se izdvajaju Londonsko matematičko društvo, osnovano 1865. i Societe Mathematique de France, osnovano 1872. godine. Početkom 80-ih godina 19.st. uslijedio je niz osnivanja matematičkih društava u Edinburghu, Palermu te New Yorku. Članovi svaki od navedenih društava i institucija redovito su se sastajali i održavali sastanke, kao i periodične konferencije (Merzbach i Boyer, 2011:548).

4. Znanstvena istraživanja u korist obogaćivanja nastave geometrije povijesnim idejama i crticama

Uključivanje povijesnih elemenata u nastavu geometrije zasigurno poboljšava razumijevanje sadržaja kod učenika, motivaciju i kritičko razmišljanje. Znanstvena istraživanja koja istražuju korist obogaćivanja nastave geometrije povijesnim idejama naglašavaju mnoge koristi takvog uključivanja načina poučavanja geometrije. Istraživanja pokazuju da povijesne crtice i priče mogu učiniti matematičke koncepte zanimljivijima i pristupačnijima. Dodavanje povijesnih elemenata u nastavu potiče učenike na razumijevanje kako su matematičke ideje evoluirale i kako su služile ljudskim potrebama kroz povijest.

Dujić (2017:455) navodi da se „stvara dojam kako je u procesu matematičkog obrazovanja ispuštena čitava povijest geometrije, koja je usko povezana s poviješću znanosti općenito. Ispuštanjem povijesne važnosti, ispustila se i važnost stjecanja geometrijskih znanja koja primjenjujemo u svakodnevnom životu. Svakom budućem učitelju neophodno je stjecanje znanja i primjena znanja iz geometrije, a razlozi za to su brojni, bilo da je riječ o stvaranju apstraktnog razmišljanja u djece najranije dobi, ili uporaba u svakodnevici, ili pak razvoj deduktivnog načina zaključivanja. Način na koji će budući učitelj prenijeti ta znanja iznimno je važan. Zbog toga on treba geometriju poznavati i razumjeti. Mora je učiniti pristupačnom djeci, kroz igru, kroz slikanje ili druge načine, kako bi ta djeca izrasla u kvalitetne članove društva. Razmišljanja i stavovi kako se rađamo sa sposobnošću za učenje matematike ili s nesposobnošću za učenje matematike, upravo se mogu izmijeniti kroz kvalitetno poučavanje geometrije. Postizanje kvalitete u takvom poučavanju leži upravo u prepoznavanju i sintezi različitih ljudskih zanimanja i znanja u kojima se geometrija primjenjuje, bilo kroz likovnu umjetnost, kroz graditeljstvo i arhitekturu, ili pak filozofiju. Učitelj uvodi djecu u svijet obrazovanja, ali i ne u svrhu obrazovanja radi obrazovanja samog, već zato da budući pojedinac pokuša svoj životni prostor spoznati i u njemu sudjelovati kao pojedinac koji doprinosi zajednici. Taj je životni prostor potpuno opkoljen geometrijom, stoga je neophodno obrazovati buduće učitelje u što boljem poznavanju i razumijevanju geometrije, kako bi oni ta znanja prenosili budućim naraštajima“.

Istraživanje koje su proveli Tzanakis i Arcavi (2000) naglašava da uvođenje povijesti matematike u nastavu povećava motivaciju učenika jer povezuju matematičke koncepte s kontekstima iz stvarnog života i povijesnim događajima. Ističu da povijesni pristup pomaže učenicima u razumijevanju apstraktnih geometrijskih pojmova jer im omogućava da vide kako su te ideje razvijane korak po korak.

Istraživanja u obrazovnoj metodologiji pokazuju da povijesni projekti i aktivnosti povećavaju angažman učenika. Na primjer, izrada replika povijesnih geometrijskih instrumenata, kao što su egipatski šestar ili rimski kompas, omogućuje učenicima da primijene geometrijske principe na stvarne zadatke. Tzanakis i Arcavi (2000) predlažu projekte u kojima učenici istražuju gradnju drevnih građevina poput piramida ili rimskih mostova, čime povezuju geometriju s arhitekturom i poviješću.

Tome svjedoče i mnogobrojna istraživanja. Gleizer (2003:2) primjerice ističe kako „upoznavanje učenika s fragmentima iz povijesti matematike, koji su povezani s osnovama matematike, u redovnoj i fakultativnoj nastavi, ima sljedeću svrhu: informacije iz povijesti matematike povećavaju zanimanje učenika za učenje matematike i produbljuju razumijevanje usvojenog gradiva, upoznavanje s povijesnim činjenicama proširuje intelektualne obzore učenika, obogaćuje njihovu opću kulturu i razvija smisao za matematiku u suvremenom društvu te upoznavanje mladih s povijesnim razvitkom matematike pridonosi općim ciljevima suvremenog društva".

Sam značaj uvođenja povijesti matematike u nastavni program rezultira brojnim pozitivnim učincima, kao što su (Fauvel, 1991:4):

1) Pomaže povećati motivaciju za učenje;
2) Daje matematici ljudsko lice;
3) Povijesni razvoj pomaže povezati različite matematičke teme;
4) Pokazivanje učenicima kako su se koncepti razvijali pomaže im razumijevanje;
5) Mijenja učeničku percepciju matematike;
6) Usporedbom stare i moderne metode korištenja znanja matematike utvrđuje se vrijednost modernih tehnika;
7) Pomaže u razvoju multikulturalnog pristupa;
8) Pruža mogućnosti za daljnja istraživanja;
9) Pomaže savladati, odnosno objasniti ulogu matematike u današnjem društvu i dr.

Nekoliko načina na koji se povijest matematike može uključiti u podučavanje matematike navodi i Lascezski (1997: 6-7), pritom se pozivajući na Rickeya (1992), a to su uvođenje novih, dodatnih tema o matematici, povijest specifičnih matematičkih koncepata, povijest notacije, biografija značajnih matematičara i njihovi najznačajniji citati, matematički problemi na temelju kojih se došlo do značajnih matematičkih poučaka i dr. Lascezski, kao i Rickey, ističu da je poučavanje povijesti geometrije, kao i drugih grana povijesti specifično, budući da se sami temelji, odnosno znanost ne mijenja, već je riječ o znanosti koja se putem usmene predaje, odnosno direktnog poučavanja prenosi iz generacije u generaciju te se ne mijenja, stoga je jedini način njene inovativnosti u odnosu na moderna vremena u tome kako je potrebno pronaći načine poučavanja koji će odgovarati današnjim tehnikama poučavanja (Lascezski 1997:7).

Kako navode Sukru Ozdemir i sur. (2012:1177), brojni su pozitivni učinci uvođenja podučavanja povijesti geometrije, kako za učenike, tako i za učitelje. Kao najvažniji pozitivni učinci navodi se pozitivni učinak na motivaciju učenika da učenja, kao i što integracija povijesti matematike u nastavu može poslužiti kao odgovor na pitanje učenika zbog čega je potrebno poznavati određeni poučak, odnosno teorem. Na primjer, učenici mogu postavljati pitanja o povijesti određenih metoda kalkulacije, bilježenja i riječi, odnosno pojedinih matematičkih termina koji datiraju u prošlost.

Problematika uvođenja povijesti geometrije u nastavnom planu prepoznata je još 1990-tih godina, a na nju se referira i Lasczecki (1997:1), koji u svom radu navodi kako se učitelji matematike kontinuirano susreću s problemom pronalaska adekvatnog načina uvođenja povijesti geometrije u nastavni plan. Naime, u brojnim istraživanjima, nastavnici matematike ističu kako se susreću s poteškoćama kreiranja nastavnog programa na način da su sve relevantne informacije predstavljene, odnosno pojašnjene učenicima na njima dovoljno zanimljiv način. Učitelji se s tim problemom suočavaju na različite načine, kao što je kontinuirano educiranje o novim načinima poučavanja, dok drugi izučavaju učinak pojedinih matematičkih aktivnosti na povijesni razvoj, kao i relevantnost u današnjem svijetu. Lascezecki (1997:1) se u svom radu poziva na Swetza, koji je još 1994. godine istaknuo kako je povijest matematike imala puno značajni udio u nastavnom programu nego što to ima danas.

Goktepe i sur. (2013:125-126) ističu kako ideja poučavanja povijesti matematike u nastavi nije nova. Povijest matematike se kao poglavlje u nastavi uključuje još od 1960.-tih i 1970.-tih godina, no, sami naglasak o važnosti uključivanja povijesti matematike u nastavi dolazi do izražaja unazad zadnjih 20-ak godina. Važnost poučavanja povijesti su tijekom godina isticali brojni znanstvenici, među kojima se ističu Fauvel i Maanen (1997), Fried (2001), Liu (2003) i dr.

5. Prijedlozi za obogaćivanje početne nastave matematike povijesnim sadržajima

Svakodnevni život od nas zahtjeva služenje geometrijskim konceptima, a da toga nužno nismo svjesni. Geometrija nam pomaže pri uređenju vrta, stana, kućice za pse ili ptice, pri gradnji ograde i slično. Mnoge profesije svakodnevno koriste geometrijske spoznaje, različiti znanstvenici, arhitekti i umjetnici, inženjeri, geodeti, a to su samo neke od njih koje se neprestano koriste geometrijskim znanjem.

U ovom poglavlju razmatraju se prijedlozi za integraciju povijesnih sadržaja u nastavu geometrije, s ciljem da se učenicima omogući dublje razumijevanje matematičkih koncepata te razvijanje kritičkog mišljenja i svijesti o povijesti geometrije. Povijesni kontekst može učenicima pomoći da shvate ne samo kako su određeni matematički koncepti nastali, već i zašto su bili važni u svojim vremenima. Učeći o matematičarima i njihovim doprinosima, učenici mogu razviti osjećaj povezanosti s matematikom kao dinamičnom disciplinom koja se kontinuirano razvija.

U nastavku se daju konkretni primjeri i strategije za implementaciju povijesnih sadržaja u redovnu nastavu geometrije. Kroz ove prijedloge cilj je potaknuti učiteljice/e da obogate svoju nastavu i poboljšaju angažman te motivaciju učenika.

5.1. Kako povući ravnu crtu (prvi razred)

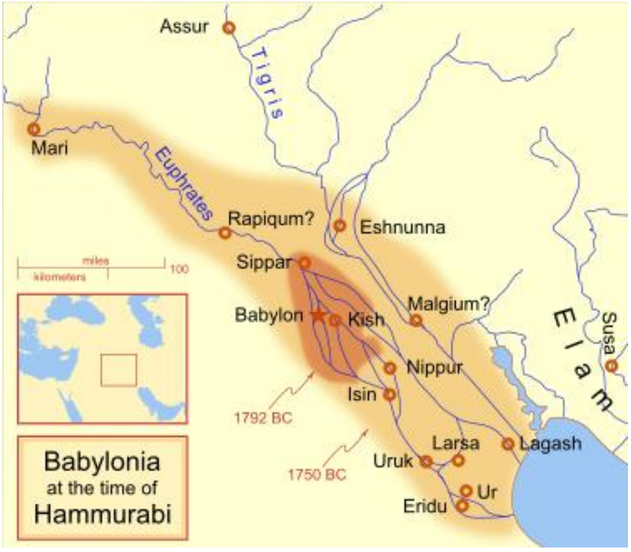
Učenicima se postavlja pitanje kako se može povući ravna crta što preciznije i komentiramo zajednički koji su sve načini mogući. Ispriča im se povijest ravnala u kratkim crticama kroz kontekst kako su ljudi (u davnoj povijesti) koristili kamenje, štapiće i druge predmete koji su im bili pri ruci kako bi crtali ravne linije (budući da tada još nije postojalo ravnalo). Također, u priču o povijesti ravnala mogu se uključiti činjenice o tome kako su ljudi, s vremenom za tu svrhu izrade ravnih linija, počeli koristiti različite predmete od trske i drveta, a ti isti predmeti su postajali sve praktičniji za svakodnevnu upotrebu.

Slika 20. Mjerna šipka od bakra

Izvor: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f0/Gilded_Bronze_Ruler_-_1_chi_%3D_231_cm._Western_Han_%28206_BCE_-_CE_8%29._Hanzhong_City.jpg

Najstarija sačuvana mjerna šipka je šipka od bakra (Slika 20) koja potječe iz 2650. godine prije Krista., a pronašao ju je nijemac Eckhard Unger dok je iskopavao sumerski grad Nippur u današnjem Iraku (Slika 21). Ravnala izrađena od bjelokosti bila su u uporabi u dolini Inda 1500. godine prije Krista. Iskapanja u Lothalu (2400. godine prije Krista) dala su jedno takvo ravnalo. Anton Ullrich izumio je sklopivo ravnalo 1851. godine. Frank Hunt kasnije je izradio savitljivo ravnalo 1902. godine.[19]

Slika 21. Položaj grada Nippura



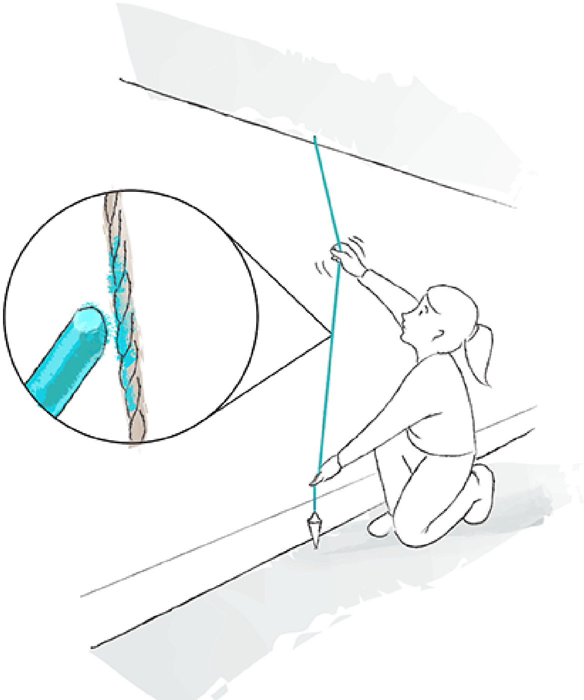
Izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/Nippur

Razgovor s djecom treba kod djece osvijestiti da je čovjek od davnina pokušao dobiti ravne crte i plohe, a da to nije bilo jednostavno, te da je u toj potrazi izrađivao razna pomagala, da bismo se danas naposlijetku u školi koristili ravnalom. Rasprava također može potaknuti djecu na razmišljanje koliko je crta povučena uz pomoć pomagala ravnija od one povučene rukom te postoji li nešto savršeno ravno. Djecu se pita: Što je ravno? Kako napraviti ravnu crtu prostom rukom? Kako da ispadne još ravnija? Kako su nekad ljudi dolazili do ravnijih crta? Što je zapravo ravno? Je li to površina mirnog mora ili jezera te je li to možda i površina zaleđenog jezera i sl.? Znate li koja je crta ravna? Kako bi prikazali najkraći put od svoje kuće do škole? Kojom vrstom crta? Je li zraka sunca ravna?

[19] Wikipedia contributors. (2024, August 24). Ruler. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 11:51, September 3, 2024, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ruler&oldid=1241967958

Dodatno, kao jedan od načina predlaže se poučiti djecu i napraviti zajednički kako se crtala ravna crta bez upotrebe ravnala, primjerice upotrebom konaca, niti, štapova, rubovima dasaka ili kamenja. Potrebno im je praktično pokazati i s njima napraviti ravne crte.

Slika 22. Postupak dobivanja ravne linije pomoću užeta i krede



Izvor:https://www.ukoakdoors.co.uk/wp/wp-content/uploads/2013/02/plumbline01.gif

Ravna crta može se primjerice nacrtati pomoću jednog konopca i malo krede. Potrebno je konopac proći kredom kako bi na njemu ostala boja te prah same krede što se naziva zidarskim konopcem (Slika 22). Razvuče se konop kako bi bio čvrsto napet na mjestu gdje želimo dobiti ravnu crtu. Treba biti nekoliko milimetara iznad površine gdje želimo dobiti ravnu crtu i onda se lagano trzne konop kako bi prah krede mogao pasti na površinu i ostaviti trag (Slika 23). Time dobivamo gotovo savršeno ravnu crtu bez upotrebe ravnala. Bilo da zadatak izvodimo u učionici ili izvan nje, postupak je isti.

Slika 23. Postupak dobivanja ravne linije pomoću užeta i krede u prirodi

Izvor: https://www.youtube.com/watch?v=bVHt-XkWnu4&ab_channel=UltimateHandyman

5.2. Mjerne jedinice za duljinu i mjerenje u povijesti (drugi razred)

Cilj je implementacije povijesti mjernih jedinica i samog mjerenja da učenici osnovne škole razumiju mjerenje duljine te se može provesti u drugom razredu osnovne škole gdje se učenici susreću s procjenom, mjerenjem i crtanje dužine zadane duljine, a povezan je s ishodom MAT OŠ D.2.2. u Kurikulumu nastavnog predmeta matematika za osnovne škole i gimnazije. Pokazivanjem kako su razni drevni i drugi narodi mjerili duljinu učenici bolje spoznaju smisao mjerenja i primjenjuju takve metode svakodnevno u igri, primjerice kod crtanja terena za igru graničara. Tako su primjerice drevni Egipćani koristili metodu mjerenja štapom prilikom gradnje piramida.

Slika 24. Mjerenje visine jediničnom duljinom dlana

Izvor: https://i.pinimg.com/564x/1e/fa/da/1efadae42849f528f28f5a34c9c8ebe0.jpg

Pokazujemo tradicionalne odnosno prirodne metode mjerenja uz pomoć tijela (npr. mjerenje duljine palcem, laktom i sl.) ili pomoću prirodnih objekata (širina neke rijeke i sl.). Unutar nastavne jedinice gdje se procjenjuje, mjeri i crtaju dužine zadane duljine (MAT OŠ D.2.2.) učenici mjere duljine raznih objekata primjerice pomoću jedinične duljine palca ili lakta (klupa je duljine 3 lakta, vrata su visine 4 lakta, udžbenik iz matematike je duljine 6 palaca i slično). Učenicima se zadaju razni zadatci sličnog tipa. Pritom se djeca kroz vježbu sama odlučuju kojim dijelom tijela mjere koju duljinu, odnosno, prilagođavaju odabir jedinične mjere objektu kojega mjere.

1. Koliko je jediničnih duljina lakata od tebe udaljen Marko?
2. Jediničnom duljinom olovke u pernici izmjeri duljinu ploče.
3. Koliko jediničnih duljina lakata je visoka Ana?
4. Izmjeri visinu ormara mjernom jedinicom duljine svog palca.

5. Pomoću jedinične duljine konopa koji si dobio izmjeri visinu učiteljice.

Slika 25. Mjerenje udaljenosti jediničnom duljinom slamke

Izvor:

http://www.mrswideen.com/2013/04/fun-with-measurement.html

Slika 26. Mjerenje udaljenosti škole i dvorane jediničnom duljinom konopa

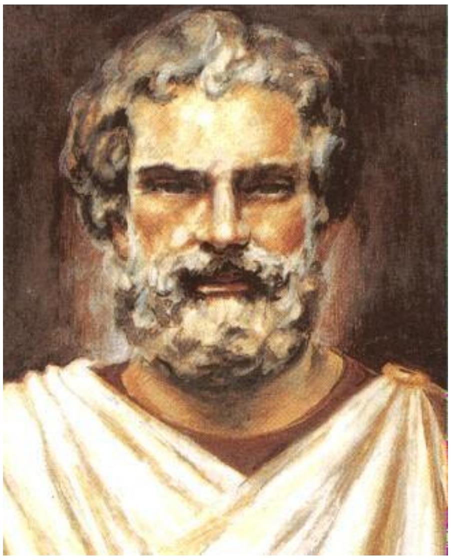
Izvor:

https://4.bp.blogspot.com/-MDgUYshwue4/TVV5sfEh10I/AAAAAAAABzw/-VMGROMrmds/s320/IMG_1172.JPG

5.3. Pravi kut pomoću kružnice (treći/četvrti razred)

Prilikom obrade crtanja pravog kuta (MAT OŠ C.4.1.) te obrade konstruiranja kruga i njegovih elemenata (MAT OŠ C.4.3.) u četvrtom razredu osnovne škole crtati pravi kut možemo na način da se izvedba poveže s Talesovim poučkom. Iznesemo nekoliko zanimljivih činjenica o Talesu, primjerice da ga možemo smatrati prvim poznatim znanstvenikom starog svijeta, da je znao izračunati visinu piramida u Egiptu i udaljenost broda od obale, da je bio poznat po vremenskim prognozama te predviđanju pomrčine Sunca., pokažemo kako je on izgledao (Slika 27).

Slika 27. Tales

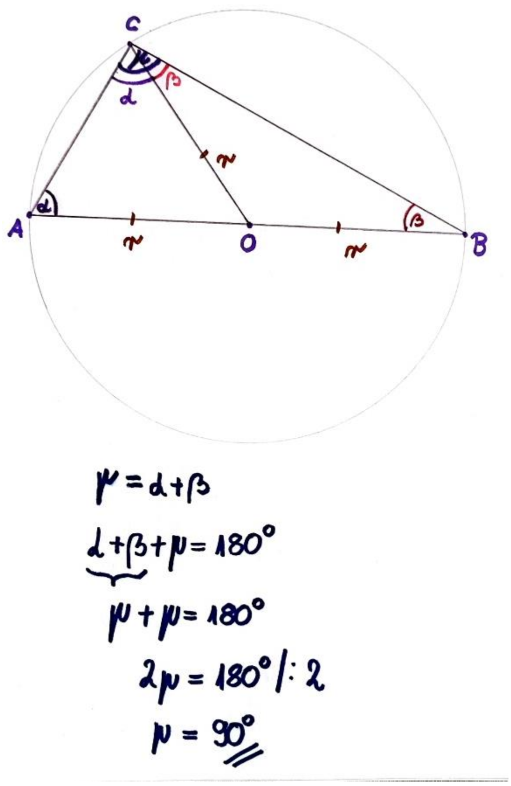


Izvor: https://www.znanje.org/i/i26/06iv01/06iv0119/tales.jpg

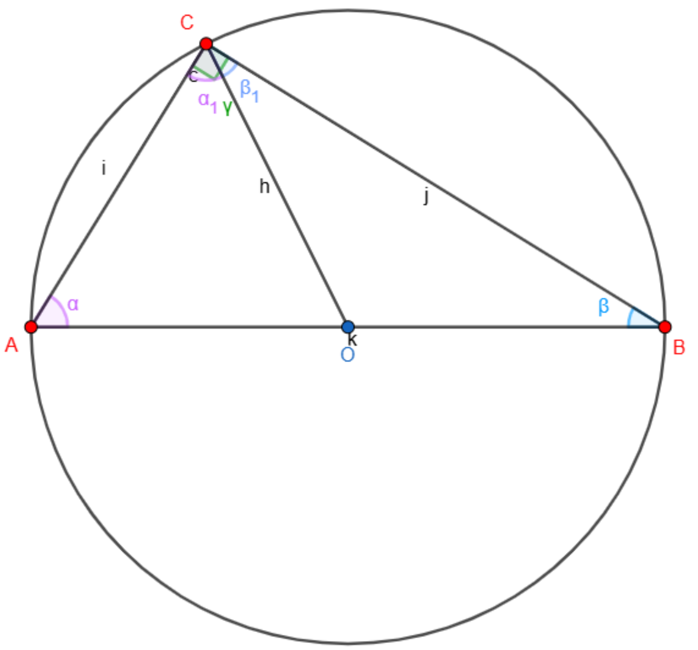
Navedimo teorem i dokažimo ga (Slika 28 i 29).“Ako je AB promjer kružnice, a C bilo koja točka kružnice različita od A i B, tada je trokut ACB pravi.

Dokaz. Neka je O središte kružnice promjera AB. Neka je CAB = α, ABC = β i ACB =γ. Kako je AOC jednakokračan s osnovicom AC, to je ACO = α, a kako je BOC jednakokračan s osnovicom BC, to je BCO = β. Slijedi γ = ACB = ACO+ OCB =α+β. Konačno, iz α+β +γ = 180° slijedi 2γ = 180° i konačno γ =90°. Kut kojemu je vrh središte O kružnice k zovemo središnji kut kružnice k. Krakovi a i b nekog središnjeg kuta aOb kružnice k sijeku kružnicu k u dvije točke A i B. Presjek kružnice k i aOb naziva se kružni luk. Često kažemo da je aOb (odnosno AOB) središnji kut nad lukom AB. Konveksni kut kojemu vrh T leži na kružnici k i čiji krakovi sijeku kružnicu k u dvije točke A i B zovemo obodni kut kružnice k. Često kažemo da je ATB obodni kut nad lukom AB. Sada Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice možemo izreći i ovako: Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi. Drugim riječima, središnji kut nad promjerom kružnice je dvostruko veći od obodnog kuta nad tim promjerom“ (Ilišević i sur., 2007:53).

Slika 28. Dokaz Talesovog teorema



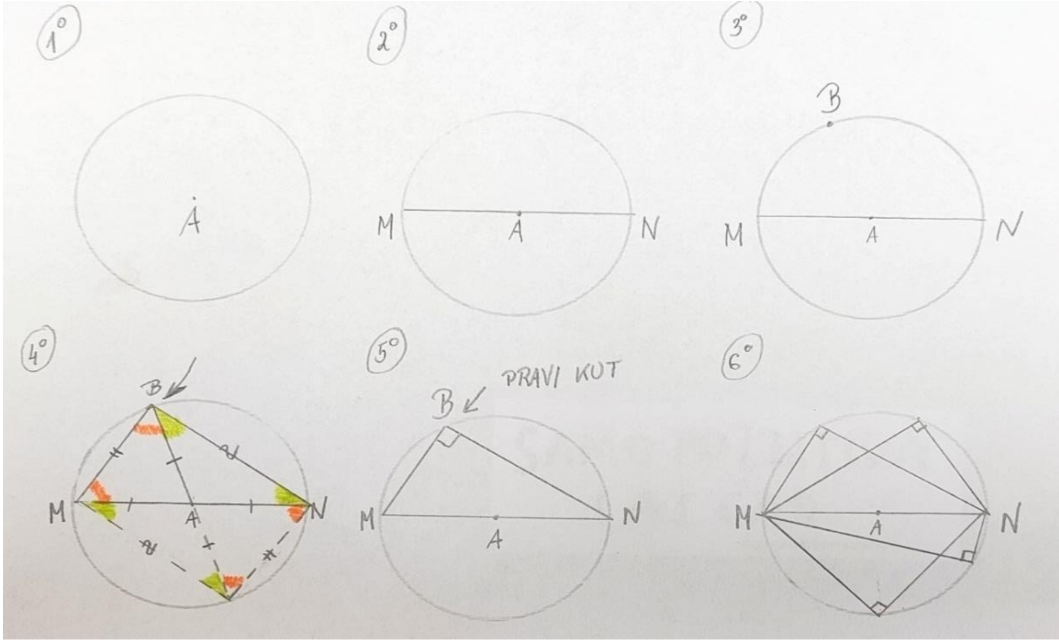
Slika 29. Dokaz Talesovog teorema u Geogebri



Prilikom objašnjavanja Talesovog poučka o kutu nad promjerom, važno je koristiti jednostavan jezik i primjere koje mogu vizualizirati i razumjeti. Dokaz se može ponuditi samo najzainteresiranijoj djeci s tim da bismo im prethodno morali demonstrirati kako je zbroj kutova u trokutu uvijek ispruženi kut (izrezivanjem kutova iz trokuta i spajanjem u ispruženi kut). Podsjećamo na osnovne pojmove poput kruga, središta kruga, kružnice, promjera, ali i jednakokračnog trokuta, ako želimo dati ideju dokaza. Tada s njima dolazimo do pretpostavke (koju potvrđujemo) da su kutovi uz krakove sukladni. Zajedno s djecom provedemo postupak dokaza. Djeca nacrtaju kružnicu na papiru. Zatim nacrtaju promjer. Stave točku bilo gdje na kružnici koja nije na promjeru. Nacrtaju dužine od krajeva promjera do te točke tako da formiraju trokut. Što mislite koji kut zatvaraju ove dvije dužine? (pokazujući na kut koji nije na promjeru) Djeco, Tales kaže da će taj kut uvijek biti pravi kut, bez obzira gdje stavimo treću točku na kružnici. Uvjerimo se sada pomoću vaših trokuta ili ruba papira da je zaista kut pravi. Zašto je to zaista tako? Po čemu bismo mogli zaključiti da je taj kut pravi? Spojimo točke A i B (Slika 28). Što je spojena dužina kružnici? Ima li još dužina koje su također radijus ove kružnice? Jesu li sve tri dužine jednake duljine? Pogledajmo trokut MAB i trokut NAB. Kakva su ta dva trokuta obzirom na duljinu stranica? Što to znači za kutove uz treću stranicu (osnovicu)? Oba kuta uz osnovicu trokuta MAB i NAB su međusobno jednaka. Sada dolazimo do toga da znamo koji su kutovi sukladni, a prethodno smo im prikazali i zbroj kutova u trokutu pa možemo s njima provesti postupak prikazan na slici 28.

Objašnjavamo kako je Tales otkrio nešto zanimljivo o kutovima u kružnici. Kad god nacrtaš trokut u kružnici tako da mu je jedna, zapravo najdulja, stranica promjer, a treća točka bilo gdje na kružnici, kut kod te točke uvijek će biti pravi kut (Slika 30). Objašnjavanje Talesovog teorema o kutu nad promjerom kružnice djeci u četvrtom razredu može biti zabavno i jednostavno ako koristimo priče, crteže i praktične primjere.

Slika 30. Skica prijedloga za crtanje pravog kuta pomoću kružnice

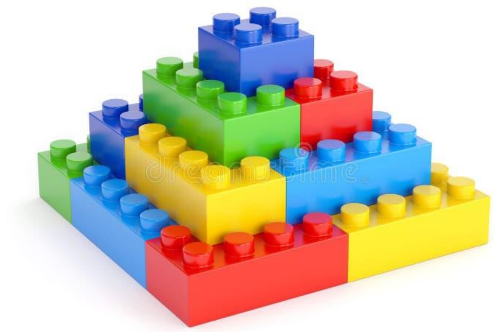


Dokaz ovog teorema učenicima ćemo pojednostavniti na sljedeći način. Provedemo ga vani na igralištu ili u pijesku. Ukoliko radimo u pijesku zabodemo štap u pijesak. Nacrtamo kružnicu uz pomoć štapa i konopa (pogledati Projekt 2). Pomoću konopa i krede kao u primjeru 5.1. nacrtamo dobivenoj kružnici pravac kroz središte i pomoću dva kamena označimo presjek kružnice i pravca (umjesto obilježavanja kamenjem odmah je moguće odabrati troje učenika koji će stati na mjesta presjeka). Uzmemo treći kamen te odaberemo proizvoljno mjesto na kružnici gdje ćemo ga staviti što će biti vrh pravog kuta kada ga nacrtamo. Sada se odaberu tri učenika/ce koji će stati na mjesto gdje smo postavili kamenje na kružnici. U ruke uzmu konop te ga međusobno napnu nekoliko milimetara od tla kako bismo dobili pravi kut.

5.4. Povijest piramide (prvi razred)

Kod obrade geometrijskih tijela u 1. razredu, možemo spomenuti egipatske piramide i zahtjevnost njihove gradnje. Egipćani su piramide gradili pomoću kamenih blokova. Slagali su ih jedan do drugog te je svaki sljedeći kat bio manji, odnosno imao manje kamenih blokova. Upućujemo djecu kako da sama naprave piramide po obliku nalik egipatskima. Prilikom izrade učenici će koristiti Lego kockice te ih slagati u katovima jedan na drugi dok ne dobijemo piramidu. Možemo se zapitati je li piramide bilo lako napraviti kao piramide od lego kockica? Zašto je puno teže bilo napraviti prave piramide? Osim piramida, možemo prikazati i druge povijesne građevine građene od kamenih blokova što djeca također mogu napraviti pomoću Lego kockica.

Slika 31. Primjer izrade piramida od Lego kockica **Slika 32. Primjer piramida izgrađenih u Egiptu**



Preuzeto s: https://thumbs.dreamstime.com/b/toy-blocks-pyramid-made-plastic-isolated-white-background-51813214.jpg

5.5. Matematička zagonetka iz povijesti (sva četiri razreda osnovne škole)

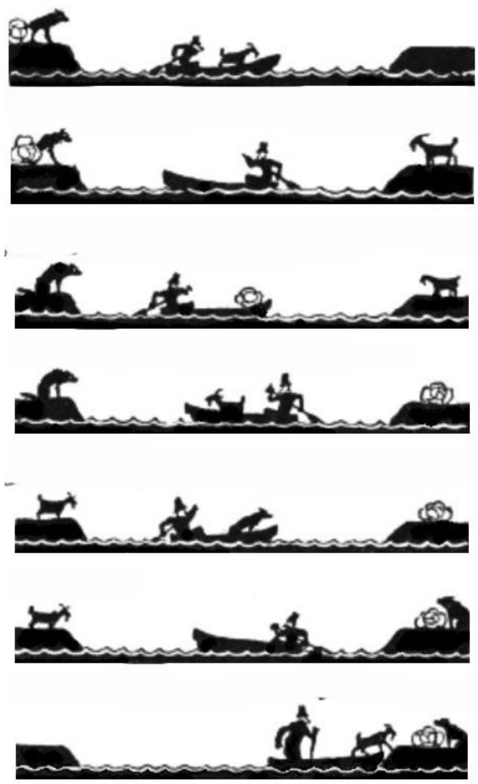
Pokažite učenicima jednostavne matematičke zagonetke koje su koristili drevni matematičari. Na primjer, zadaci poput zagonetke o čovjeku, vuku, kozi i kupusu. Učenicima se priča priča. Jedan čovjek je šetao i naišao na rijeku koju je želio prijeći. Imao je čamac koji je bio malen te je njega istovremeno smio preko rijeke povesti samo jedno od njih. Ako na obali ostavi vuka i kozu, onda će vuk pojesti kozu. Ostavi li kozu i kupus, koza će pojesti kupus. Jedino u prisustvu čovjeka nitko neće nikoga pojesti. Naizgled nerješiva zagonetka, ipak ima rješenje (Slika 31). Čovjek svakako mora uspjeti prevesti sve njih preko rijeke, ali pitanje je kako to može učiniti?

Vuk ne jede kupus pa prevoženje treba započeti s kozom. Na obali mogu ostati vuk i kupus bez čovjeka jer ne postoji opasnost da se pojedu. Čovjek preveze kozu na drugu stranu obale te se vraća sam u čamcu i uzima kupus te ga prevozi na drugu stranu. Pri dolasku ostavlja kupus, ali kozu vraća sa sobom u čamcu. Kako na drugoj strani obale ne bi vuk i koza pojeli jedno drugo, čovjek uzima u čamac vuka, a ostavlja kozu te ga prevozi na obalu. Na kraju, vraća se sam u čamcu po kozu te su konačno svi prešli preko rijeke.

Ovo nije crtica iz povijesti matematike, ali je zabavni problem koji je preživio stoljeća i našao svoje mjesto u mnogoj školskoj matematičkoj literaturi.

Zagonetka je stara preko 10.stoljeća i njezine varijacije pronađene su u drevnim kulturama, uključujući priče iz folklora i književnosti. Služi kao rani primjer problema korištenja logike i logičkog zaključivanja. Danas je to i dalje popularna vježba logičkog zaključivanja i često se nalazi u obrazovnim materijalima. [20] Radi se o logičkim zagonetkama koje bi bile primjerene za rješavanje na dodatnoj nastavi iz matematike, odnosno u specijalnim trenucima kad takav zadatak možemo, uz detaljno objašnjenje, ponuditi učenicima na redovnoj nastavi kako bismo vidjeli kako reagiraju na izazove.

Slika 33. Redoslijed rješavanja zagonetke o čovjeku, vuku, kozi i kupusu



Izvor: https://naukica.wordpress.com/2014/04/25/vuk-koza-i-kupus/

Zadatak o osam kraljica može biti odlična prilika za razvijanje logičkog razmišljanja i kreativnosti kod djece. Objasnite djeci što je problem 8 kraljica. To je klasičan problem šahovske ploče gdje treba smjestiti 8 kraljica tako da se ne napadaju međusobno. Prikazivanje šahovske ploče može pomoći djeci da bolje razumiju koncept. Podijelite djecu u male grupe da

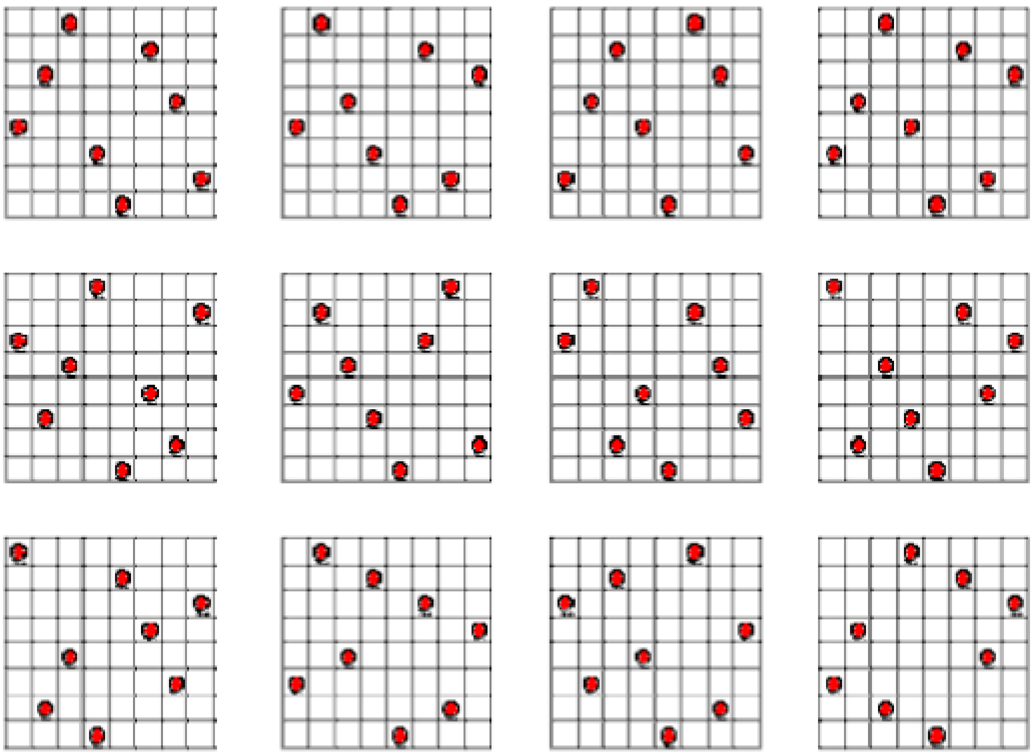
[20] Wikipedia contributors. (2024, June 3). Wolf, goat and cabbage problem. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 08:45, October 31, 2024, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Wolf,_goat_and_cabbage_problem&oldid=1227016411

zajedno razmišljaju o mogućim rješenjima. To potiče suradnju i razmjenu ideja. Održavajte otvorenu atmosferu gdje djeca mogu isprobavati različite pozicije kraljica i učiti iz pogrešaka.

Dajte im fizičke šahovske figure ili izradite papirnate kraljice koje mogu pomicati po ploči. To može učiniti proces zabavnijim. Potaknite ih da zabilježe svoja rješenja putem crteža. Neka svaka grupa predstavi svoje rješenje i objasni kako su došli do njega. Razgovarajte o različitim pristupima i rješenjima. Koje su strategije bile najuspješnije?

Ako imaju vremena, možete ih izazvati da pronađu više rješenja ili istraže druge slične probleme. Ovaj pristup ne samo da će pomoći djeci da razumiju problem, već će ih i potaknuti na kreativno razmišljanje i timski rad.

Slika 34. Primjer rješenja problema osam kraljica na šahovskoj ploči



Izvor: https://mapmf.pmfst.unist.hr/~ani/radovi/zavrsni/Stefan-Dunic-zavrsni.pdf

5.6. Crtanje pravokutnog trokuta pomoću užeta ili spajalica (Egipatski i Indijski trokut)

Cilj provedbe ove aktivnosti je upoznati učenike četvrtog razreda osnovne škole s još jednim tradicionalnim načinom konstrukcije pravog kuta, odnosno pravokutnog trokuta. Povezuje se s ishodom MAT OŠ C.4.1. gdje učenici određuju i crtaju kut. Za sredstvo koje se koristi pri izradi Projekta 3. – crtanja pravokutnog trokuta pomoću užeta ili spajalica odabrane su spajalice, ali može biti i uže s 12 čvorova jednakih međusobnih razmaka.

Vremenski okvir trajanja: 2 školska sata (90 minuta)

Potrebni materijali: spajalice ili konop (za crtanje pravokutnog trokuta), ravnalo, olovka, papir.

1) Potrebno je spojiti svih 12 spajalica jednu za drugom u lanac.

2) Zatim prvu spajalicu povežemo sa zadnjom da čine zatvoreni krug.

3) Sada istražujemo kako je potrebno rasporediti spajalice tako da dobijemo pravokutan trokut (provjeravamo trokutom je li dobiven pravi kut). Navodimo učenike da bilježe duljine stranica i kakav je trokut dobiven kod svake kombinacije.

4) Eksperimentiranjem s brojem spajalica i duljinom svake stranice dolazimo do zaključka da je potrebno redom nizati 3, 4 pa 5 spajalica da bismo dobili pravi kut, odnosno pravokutni trokut. Potičemo učenike na raspravu i zaključivanje kakve su trokute dobili. Objašnjavam da smo ciljano uzeli dvanaest spajalica, po uzoru na konstrukciju pravokutnog trokuta kojom su se koristili još stari Egipćani, te se takav pravokutni trokut kojemu su stranice duge 3, 4 i 5 naziva egipatskim trokutom.

5) Radimo svi pravokutni trokut koristeći se konopom s trinaest čvorova koji su svi ekvidistantni, simulirajući originalni postupak starih Egipćana.

Isti postupak možemo ponoviti tvoreći Indijski trokut čije su stranice duljine 5, 12 i 13 gdje moramo nizati 30 spajalica u zatvoreni krug.

Slika 35. Nizanje spajalica jedne za drugom

Izvor: https://www.istockphoto.com/search/2/image-film?phrase=chain+organization+equipment+paper+clip

6. Prijedlozi za projektnu nastavu matematike inspiriranu povijesnim idejama i crticama

Obogaćivanje nastave geometrije poviješću može biti zahtjevno i kompleksno, zbog čega je potrebno dublje obraditi pojedine dijelove i teme. Projekt je u „svaki zaokružen, cjelovit i složen pothvat čija se obilježja i cilj mogu definirati, a mora se ostvariti u određenom vremenu te zahtijeva usuglašene napore nekoliko ili većega broja ljudi, službi, poduzeća i sl" (Matijević i sur., 2011:165).

„U radu s učenicima na matematičkim projektima ne treba se opterećivati uzrastom, nadarenošću, godinama učenja matematike ili brojem sati. S učenikove strane dovoljna je volja, upornost i rad. Što se tiče učitelja, njegov je zadatak prilagoditi sadržaje, načine rada, osmisliti dobar metodički pristup i aktivnosti te tako u potpunosti zadovoljiti ciljeve provođenja projekta" (Janeš, 2006:51).

6.1. Projekt 1 – Računanje približne površine kruga pomoću površine kvadrata

Cilj provedbe ovog projektnog zadatka je upoznati učenike četvrtog razreda osnovne škole s metodom približnih površina raznih, pa i nepravilnih likova. Među ostalima, računala bi se površina kruga. Učenici tada već poznaju pojam površine kvadrata, no poželjno je i proširiti znanje o površinama drugih likova koje će uslijediti u višim razredima osnovne škole. Projekt se povezuje s ishodom MAT OŠ D.4.2. gdje se od učenika očekuje da uspoređuje i mjeri površine likova.

Vremenski okvir trajanja: 2 školska sata (90 minuta)

Još u davna vremena stari Grci znali su kako izračunati površinu kvadrata. Potaknite učenike na raspravu i prisjećanje o računu površine kvadrata i pravokutnika, stavljajući likove u kvadratnu mrežu. Arhimed je shvatio da površina kruga ima sličnosti s površinom kvadrata i povezana je s kvadratom duljine polumjera kruga. Postoje brojne legende o Arhimedu, a jedna od njih vezana je za njegovu smrt. Kaže da je on poginuo crtajući krugove u pijesku tijekom napada rimske vojske na grad Sirakuzu. Prema zapisu povjesničara Plutarha, Arhimed je razmatrao određeni geometrijski problem crtajući u pijesku kad mu je pristupio rimski vojnik i naredio da pođe s njim do zapovjednika Marcelusa. Arhimed je bio u žaru pronalaska rješenja svojega problema pa je odbio i upozorio vojnika rečenicom: „Ne dirajte moje krugove!". Vojnik ga je tada ubio, obzirom da je u to vrijeme takvo suprotstavljanje bilo vrijeđanje časti vojnika.

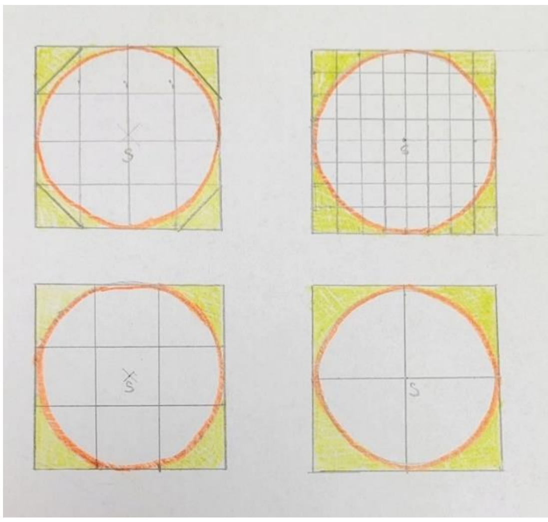
Do danas, nije sigurno jesu li to zaista bile posljednje Arhimedove riječi, a upitno je i jesu li bile izgovorene latinskom (Stein, 1999:2-3).

Slika 36. Arhimedova smrt

Izvor: Scriba, Schreiber, 2015:74

Učenicima se daju jasne upute. Na ploči/papiru nacrtajte krug unutar kvadrata s kvadratnom mrežom (Slika 37). Pitamo koliki dio kvadrata zauzima krug? Je li cijeli kvadrat ispunjen? Zatim ga možete smještati u kvadratnu mrežu koja je sve finija i finija i promatrati kvadrate unutar, odnosno brojiti koliko ih ima pa uspoređivati. Objasnite da ćemo tim putem dobiti svaki put približnu površinu kruga, ali nećemo doći do lijepog rješenja i veze s polumjerom kakvu je uočio Arhimed. Tu će vezu učenici učiti kasnije, i koristiti je dalje gotovo svakodnevno.

Slika 37. Smještanje kruga u različite kvadratne mreže



6.2. Projekt 2 – Crtanje kružnice pomoću užeta

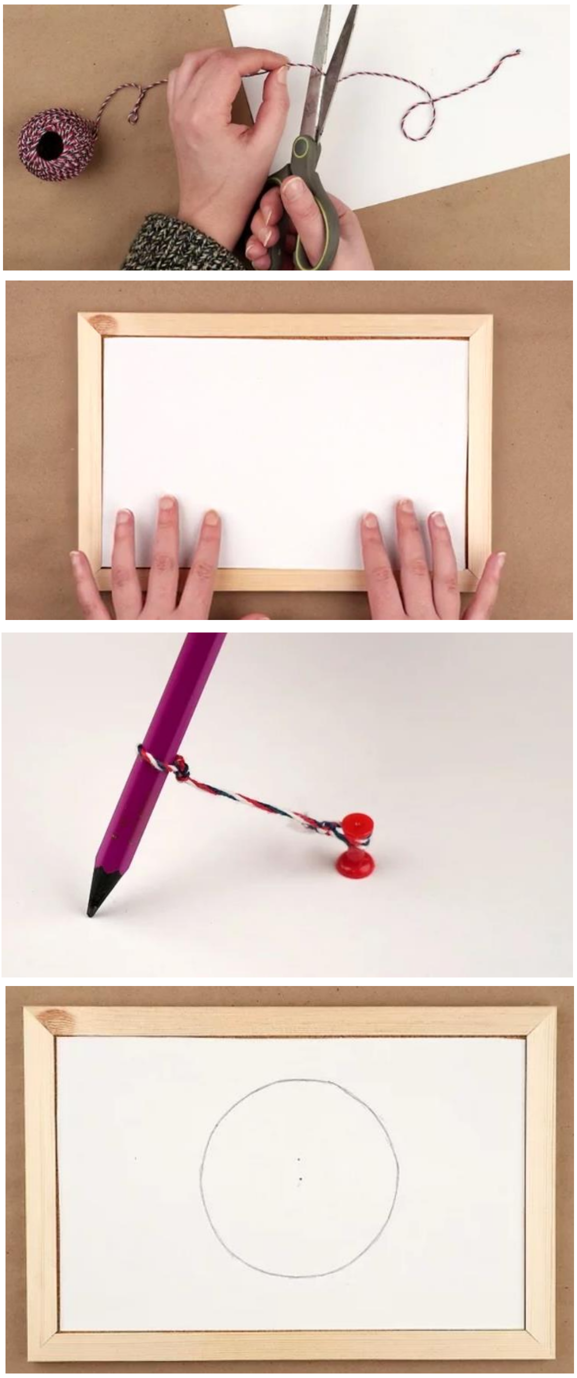
Cilj provedbe ovog projektnog zadatka je upoznati učenike trećih razreda osnovne škole pri prvom susretu sa šestarom s metodikom crtanja kružnice pomoću užeta, odnosno cilj nam je da razumiju definiciju i svojstvo kružnice te šestara kao i njegovu svrhu. Projekt se povezuje s ishodom MAT OŠ C.3.3. gdje se učenici služe šestarom u crtanju i konstruiranju.

Provedba aktivnosti crtanja kružnice pomoću užeta u nastavi geometrije zanimljiv je i praktičan način da učenici steknu dublje razumijevanje geometrijskih pojmova, kao i povijesnih metoda mjerenja i crtanja. Koristit ćemo se intuitivnom, prirodnom metodom crtanja kružnice i kruga. Započnite projekt s objašnjenjem kako su ljudi u povijesti, prije nego što su izumljeni moderni geometrijski instrumenti poput šestara, koristili jednostavna sredstva, kao što su uže, kako bi crtali geometrijske oblike. Objasnite učenicima osnovne geometrijske pojmove vezane uz kružnicu: središte, polumjer, promjer, opseg i pojam kružnog luka.

Vremenski okvir trajanja: 4 školska sata (180 minuta)

Materijali: Uže, štap, kreda.

Slika 38. Postupak dobivanja kružnice pomoću užeta u učionici



Izvor: https://www.wikihow-fun.com/Draw-a-Perfect-Circle-Using-a-Pin

1. Pri dolasku u vanjsko okruženje, predlaže se korištenje površine kao što je zemlja, pijesak ili slično. gdje se može štap učvrstiti za površinu gdje će se zadatak izvesti. Ponovit ćemo s učenicima što je krug, na način da ga učenici opišu. Ako im kažemo da stanu ukrug, ili još bolje ukrug oko učitelja/učiteljice, pokazat će da

intuitivno znaju definiciju kruga odnosno kružnice. Kružnica kao rub kruga je skup točaka udaljenih jednako od čvrste točke – središta. Verbaliziramo to s učenicima.

2. Pitamo učenike kako bismo krug, odnosno kružnicu mogli nacrtati na zemlji/pijesku. Pritom neka imaju na umu ono do čega su sami došli – želimo dobiti trag na konstantnoj udaljenosti od odabrane točke. Ukoliko sami ne dođu do ideje, pokazujemo im štap i uže.

3. Realiziramo ideju. Štap mora biti čvrsto zaboden za zemlju, a uže učvršćeno jednim krajem oko njega. Na drugi kraj stavimo učvrstimo slobodni štap ili kredu, ovisno o podlozi. Pri konstrukciji jedan od učenika, držeći nategnuto uže, hoda oko čvrstog štapa, dok onime na drugom kraju obilježava trag po kojem hoda štapom ili kredom.

Ovaj primjer projektnog zadatka može se izvesti u unutarnjem okruženju (Slika 38). Radimo li u razredu bit će nam potreban papir, manji pluteni čep ili plutena podloga (može i stiropor), jedna pribadača, konop te olovka. Postupak je isti za oba prostora, ali materijali se razlikuju.

Potaknite učenike da razmisle o iskustvu što su naučili o geometriji i povijesti, te kako se ove jednostavne metode mogu povezati s modernim alatima, konkretno šestarom. Demonstrirajte uporabu šestara, i potaknite učenike da ju objasne, vodeći se iskustvom crtanja kružnice uz pomoć konopa. Ova jednostavna metoda zaista je kroz povijest korištena prilikom gradnje kružnih oblika.

6.3. Projekt 3 – Prepoznavanje geometrijskih tijela i likova u povijesnim građevinama

Cilj provedbe ovog projektnog zadatka je razvijanje učeničkih znanja i vještina da prepoznaju geometrijska tijela i likove u povijesnim građevinama. Nastavno na prethodne projektne zadatke kod kojih je cilj bio educirati učenike o drevnim geometrijskim metodama, ovim projektnim zadatkom nastoji se postići da djeca samostalno prepoznaju te likove u realnom svijetu. Projekt se može provesti već u prvom razredu osnovne škole prvi susretu učenika s geometrijskim tijelima te likovima povezano s ishodom MAT OŠ C.1.1. Za materijale koji se koriste prilikom izrade ovog projektnog zadatka predlažu se slike, odnosno fotografije pojedinih povijesnih građevina, kao što su primjerice Eiffelov toranj, Keopsova piramida, Katedrala Notre Dame u Parizu, dvorac Neuschwanstein u Njemačkoj i brojni drugi.

Vremenski okvir trajanja: 2 školska sata (90 minuta) – nekoliko dana

Slika 39. Prijedlozi povijesnih građevina za projekt 6

Izvor: *Wikipedija: Katedrala Notre Dame, Pariz* (2024)

Izvor: *Ideja putovanja.hr* – Eiffelov toranj u Parizu (2024)

Izvor: *Neuschwanstein Castle – welcome!* (2024)

Izvor: Hrvatska turistička zajednica

Potom, po pokazanim slikama, učenicima se daje da probaju iz drvenih „kockica“ kojima se djeca igraju pokušaju prikazati viđene građevine. Naravno, djeca će raditi „replike“ različitih veličina, pritom odabirući elemente za koje smatraju da su adekvatnog oblika, učiti se kroz konstrukciju simetrijama i statici konstrukcije.

U projektu zasebno možemo izdvojiti građevine svrstane u svjetska čuda i o svakom ispričati nekoliko zanimljivosti. Time projekt može trajati kraće ili dulje. Kao i u prethodnom slučaju, zabavimo se s djecom na način da im damo da drvenim geometrijskim tijelima rade replike prikazanih građevina.

6.4. Projekt 4 - Tangram

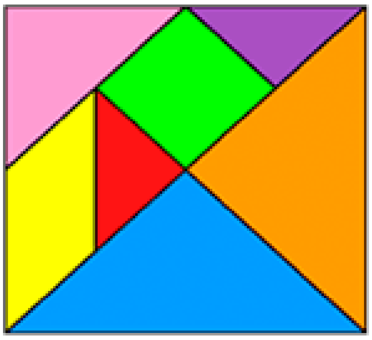
Cilj provedbe ovog projektnog zadatka je upoznati učenike nižih razreda osnovne škole s tangramom i njegovim obilježjima, kao i što je cilj razviti dodatne motoričke vještine djece prilikom korištenja tangrama, jedne od najpoznatijih slagalica.

Tangram je nastao u Kini, negdje u 18. stoljeću. Trgovačkim je brodovima prenesena u Ameriku i Europu u 19. stoljeću. Tangram se sastoji od sedam tangram – pločica, odnosno pet pravokutnih trokuta, jednog kvadrata i jednog paralelograma zadanih omjera veličina. U Kini su ga smatrali zabavom za žene te djecu, a kasnije je u Europi, za vrijeme Prvog svjetskog rata, postala vrlo zanimljiva. Istražujući povijest tangrama postoje razne legende o njegovom nastanku, no najpopularnija je ona o staklaru i kralju, iako se ne zna koja je legenda zaista istinita jer je točna povijesna priča nepoznata“ (Gusić, 2019:34).

Legenda kaže kako je tada Kinom vladala dinastija Song te je „car od najspretnijeg staklara u carstvu naručio da izradi staklenu ploču oblika kvadrata koja je trebala poslužiti kao prvi prozor na carevu dvoru. Nakon što je vješto odradio posao, staklaru je preostao osjetljivi dio zadatka da prijeđe dugačak put kako bi dostavio staklenu ploču cijenjenome caru. Nakon duga i zahtjevna puta, staklar je napokon došao na vrh planine s koje se protezao pogled na carevu palaču. Sretan što se njegov put bližio kraju, staklar je pohitao prema palači, spotaknuo se o kamen i skotrljao niz planinu. Svileni rupci i kožni ogrtači omotani oko staklene ploče nisu je mogli zaštititi od takvoga pada. Na veliku žalost, ploča se razbila, no na iznenađenje vrsnoga staklara nije se razbila u komadiće, nego u sedam jasnih dijelova. Pokušavajući sastaviti ploču u originalni kvadratni oblik, staklar je primijetio da tih sedam dijelova može presložiti u razne zanimljive figure. Došavši na carev dvor odlučio je iskoristiti nesreću kako bi uz pomoć razbijenih komada stakla caru pokazao put koji je prošao. Prikazao mu je svoj dom, devu koju je sreo u pustinji, brod koji je plovio rijekom, pa čak i planinu s koje je pao. Caru se ova igra toliko svidjela da se danima nije odvajao od sedam staklenih pločica. I tako je, umjesto prvog prozora, car dobio zanimljivu igru – tangram“ (Gusić, 2019:34-35). Ova istaknuta legenda jedna je od brojnih, a djeci se može po potrebi ispričati jedna ili više njih ovisno o interesu.

Vremenski okvir trajanja: 2-3 školska sata (90-135 minuta)

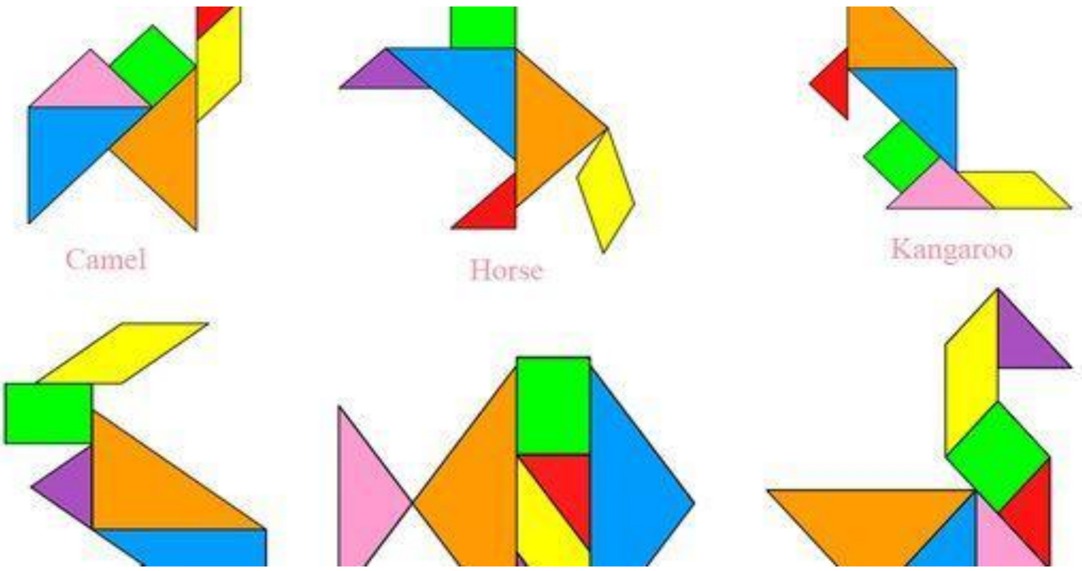
Slika 40. Tangram



Izvor: *Seven Boards of Skills* (2024)

Prije početka provedbe ovog projektnog zadatka, predlaže se da se učenicima da slobodno vrijeme (kraći vremenski interval) kako bi upoznali tangram, njegovom poviješću, njegovim geometrijskim oblicima i kako bi imali nekoliko minuta da slože likove i predmete prema vlastitom nahođenju. Potom, u aktivnom radu s učiteljima, predlaže se korištenje igara: Tko može najbrže složiti određeni lik? Tko može složiti najviše različitih oblika od tangrama, a tko može složiti oblik od određenog broja oblika tangrama? Na idućoj slici prikazani su oblici koji se mogu dobiti upotrebom tangrama, a cilj je da se provedbom takvih igara kod učenika potiču geometrijski zor, geometrijsko mišljenje, kao i što se dodatno doprinosi razvoju njihovih motoričkih vještina. Učenicima prvog i drugog razreda pokazali bismo siluete likova u stvarnoj veličini koja se može složiti iz njihovog tangram seta, dok bismo većim učenicima pokazivali siluete u proizvoljnoj veličini, što čini zadatak zahtjevnijim.

Slika 41. Oblici koji se dobivaju igrom tangrama



Izvor: *Seven Boards of Skills* (2024)

6.5. Projekt 5 – Izrada i primjena geoploče

Geoploča geometrijsko je pomagalo koje je napravio i popularizirao Caleb Gattegno, matematičar i pedagog rođen 1911. godine u Aleksandriji, Egiptu. Gattegno je bio poznat po svojim inovativnim pristupima u obrazovanju, osobito u podučavanju matematike i jezika. U 1950-im godinama, dok je radio na razvoju metoda za poučavanje matematike koje su temeljene na vizualnim i praktičnim aktivnostima, osmislio je geoploču kao alat za istraživanje geometrijskih oblika i odnosa. Gattegnova ideja bila je stvoriti jednostavan alat koji bi omogućio učenicima da istražuju geometrijske koncepte kroz manipulaciju i eksperimentiranje. Geoploča je brzo postala popularna zbog svoje jednostavnosti i učinkovitosti u podučavanju apstraktnih geometrijskih koncepata na vizualan način (Čižmešija i sur., 2012:26-27).

Tijekom 60-ih i 70-ih godina prošlog stoljeća, geoploča je postala standardni dio matematičkog obrazovanja u mnogim zemljama, a posebno u osnovnim školama. Njena uporaba je podržana i kroz različite obrazovne reforme koje su naglašavale važnost razumijevanja koncepta, a ne samo memoriranja formula. Geoploča je omogućila učenicima da kroz igru i eksperimentiranje sami otkriju zakone geometrije, što je pridonijelo dubljem razumijevanju matematičkih pojmova. Danas se geoploče koriste diljem svijeta u različitim oblicima, a unatoč tehnološkim napredcima, fizičke geoploče i dalje su popularne zbog svoje taktilne prirode koja omogućuje učenicima da izravno manipuliraju oblicima i bolje razumiju prostor i geometrijske odnose (Čižmešija i sur., 2012:35-36). Jasno je da je izvorno osmišljena kao jednostavno pomagalo za podučavanje geometrije, ali je s vremenom je postala neizostavan alat u matematičkom obrazovanju. Njena povijest odražava evoluciju obrazovnih metoda, od tradicionalnog pristupa do suvremenih, interaktivnih i vizualno usmjerenih metoda učenja.

Učenici mogu i izraditi svoju geoploču koju će kasnije koristiti u nastavi matematike za učenje, istraživanje i eksperimentiranje. Potrebno je osigurati komad daske ili druge tvrde podloge, onoliko čavlića (ili čepića) koliko žele da ima njihova geoploča te čekić ili ljepilo ovisno što su odabrali čavliće ili čepiće. Potrebno je još imati nekoliko gumica raznih veličina koje će koristiti na svojoj geoploči za dobivanje raznih oblika te geometrijskih likova. Geoploča je izrazito korisno pomagalo za predočavanje oblika i razumijevanje za njih vezanih pojmova kao što su sukladnost, sličnost, rotacija, translacija, zrcaljenja, zatim mjerenja površina i slično. Ovdje ju ističemo jer uz njenu pomoć možemo provoditi aktivnosti konstrukcije kružnice i pravokutnog egipatskog i indijskog trokuta koje smo naveli (konstrukcija kružnice je ovdje približna). Vremenski okvir trajanja: 2 školska sata (90 minuta) – nekoliko dana

Slika 42. Geoploča

Izvor: Magično drvce: Igračke za djecu (2024)

6.6. Projekt 6- Biografije velikih matematičara

Učenici mogu istražiti život i rad velikih matematičara poput Pitagore, Euklida, Arhimeda, Talesa i ostalih te ih nakon toga izložiti drugim učenicima u razredu te potaknuti diskusije i međusobni razgovor. Zadatak učenika bilo bi istraživanje biografija, pisanje kratkog izvještaja, izrada prezentacija, plakata ili čak dramatizacija ključnih trenutaka u životima tih matematičara. Cilj projektnog zadatka je motiviranje učenika kroz priče o osobnim izazovima i uspjesima matematičara te razumijevanje njihovih doprinosa matematici na razini na kojoj je to moguće u 4. razredu osnovne škole..

Vremenski okvir trajanja: 4 tjedna

6.7. Projekt 7 – Matematika – putovanje kroz vrijeme

Učenici četvrtog razreda osnovne škole mogu kreirati vremenske lente ili kapsule koje prikazuju razvoj matematičkih ideja kroz različite povijesne epohe, od Egipta, Sumerana, preko srednjeg vijeka, do renesanse i modernog doba. Zadatak bi bio prikupljanje informacija, izrada plakata, prezentacija ili čak digitalne prezentacije koje prikazuju matematičke spoznaje, metode i ključne ličnosti iz različitih razdoblja. Cilj projekta je povezivanje matematičkih ideja kroz povijest i razumijevanje kako su se one razvijale i utjecale na društvo.

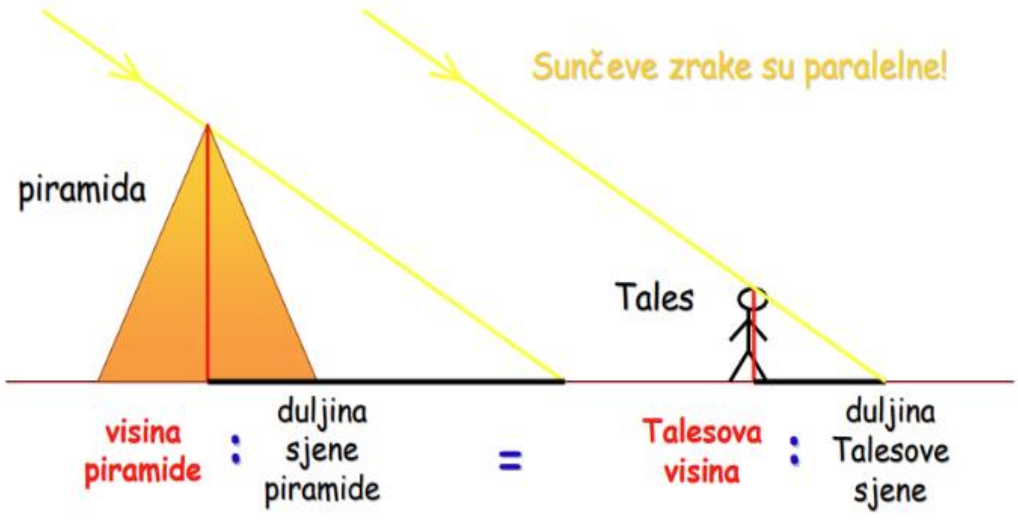
Vremenski okvir trajanja: 1 tjedan – 4 tjedna

6.8. Projekt 8 - Izračun visine piramide (četvrti razred)

Projekt izračuna visine piramide moguće je već objasniti i učenicima nižih razreda osnovne škole u sklopu dodatne nastave, obzirom da ovakav projekt izlazi izvan okvira kurikuluma, a moguće ga je provesti u četvrtom razredu osnovne škole.

Učenicima se objasni način na koji je Tales izračunao visinu Keopsove piramide u Egiptu pomoću užeta i sjene piramide, pri čemu mu je od koristi bilo Sunce. Promatrao je sjenu piramide te sjenu koju je stvaralo njegovo tijelo te je došao do zaključka da će duljina sjene piramide biti jednaka visini piramide u trenutku kada duljina njegove sjene (koju čini Sunce) i njegova budu jednake (Udovičić, 2019:31).

Slika 43. Prikaz odnosa visine piramide i njene duljine sjene s Talesovom visinom i njegovom sjenom koja se prikazuje djeci te se pomoću nje služe pri sličnim izračunima

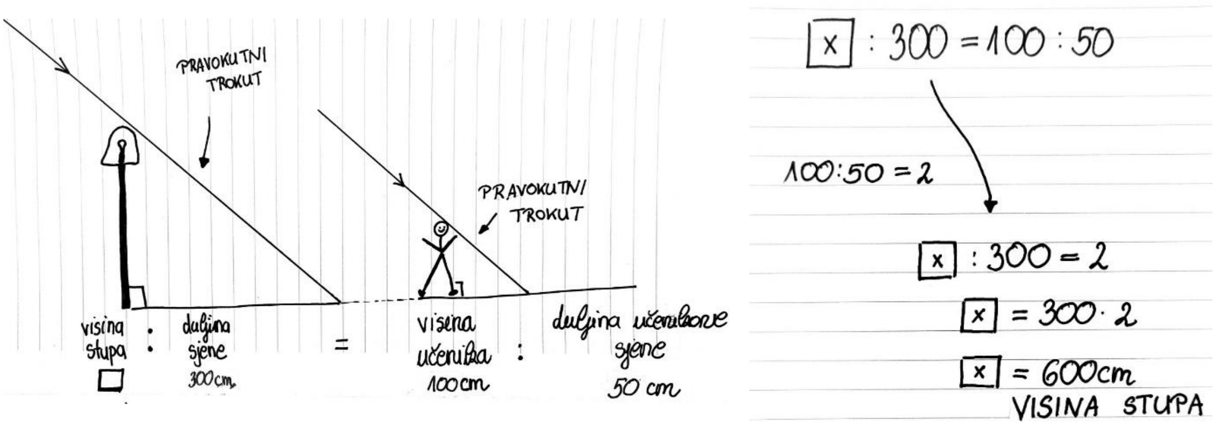


Izvor: Udovičić, 2019: 31

Tales je došao do zaključka da onoliko puta koliko je njegova visina veća od duljine njegove sjene, toliko je isto puta visina Keopsove piramide veća od duljine sjene piramide. Navedeno je užetom izmjerio na sljedeći način: duljina užeta jednaka je duljini Talesove sjene. Potom, pomoću užeta izmjerio je koliko je puta sjena piramide dulja od Talesove. Problem koji se pojavio prilikom mjerenja je taj što se duljina sjene piramide treba izmjeriti od središta baze piramide, kojeg nije moguće izmjeriti. Tales je predložio rješenje za taj problem. Naime, pomicanjem sjene piramide pomiče se i linija koja povezuje središte baze piramide i njen pripadajući vrh. Utvrđeno je da u trenutku kada ta linija bude usporedna s osnovicom baze, dio sjene koji se nalazi unutar piramide bit će iste duljine kao i polovica osnovice baze (Udovičić, 2019: 31-32).

Uvodni zadatak za učenike može biti pronaći visinu štapa uz pomoć visine drugog štapa i njegove sjene, ili visinu učenika, visinu stabla, ili primjerice visinu rasvjetnog stupa. Potrebno je izaći na sunčan dan zajedno s učenicima ispred škole te izmjeriti duljinu sjene stupa kao i svoje sjene. Zapišemo ih te izmjerimo svoju visinu. Sada metodom koju smo iznijeli (Slika 40) izračunamo visinu stupa (Slika 44 i 45).

Slika 44. i 45. Primjer zadatka za izračun



6.9. Projekt 9 - Povijest mjerenja vremena

Potrebno je zapitati se zašto uopće dajemo prijedlog mjerenja vremena te kakve on ima veze s nastavom geometrije. Povijest mjerenja vremena i geometrija su usko povezane na nekoliko načina. Mjerenje vremena često se temelji na astronomskim fenomenima, kao što su gibanje Sunca, Mjeseca i zvijezda. Geometrija igra ključnu ulogu u određivanju tih ciklusa, jer se oni opisuju uočavajući geometrijske oblike i odnose. Jedan od prvih načina mjerenja vremena bio je pomoću sunčanih sati, koji koriste geometriju da bi odredili vrijeme na temelju sjene koju baca vertikalna šipka na podlogu. Kut pod kojim sunčeva svjetlost pada i dužina sjene su geometrijski koncepti, kao i sama ideja sunčevog sata (Rohr, 2012). U geometriji, kružnice su važan koncept, a mnogi alati za mjerenje vremena, poput satova, koriste kružne mehanizme primjerice kotačiće. Geometrijska načela omogućuju razumijevanje tih mehanizama i njihovu izradu. Razvoj koordinatnih sustava i kartografije također bio je povezan s mjerenjem vremena, konkretno u navigaciji. Za navigaciju je bila bitno određivanje precizne lokacije, a to se moglo raznim geometrijskim i astronomskim tehnikama, ili kombinacijom s preciznim mjerenjem vremena.

U drugom razredu osnovne škole radi se vrijeme i mjerenje vremena. Možemo ga bolje približiti djeci prikazujući im kako se vrijeme mjerilo u povijesti. Učenike upitamo „Kako biste izmjerili vrijeme i pomoću čega da ste živjeli u dalekoj povijesti?, Što bi za vas bio jedan dan ili primjerice jedan sat te kako bi to objasnili? Što su dan i noć? Koliko je to sati i zašto baš toliko? “.

Slika 46. i 47. Sunčani sat

Izvor:

https://en.wikipedia.org/wiki/Sundial

Izvor:

https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=FcvstZluAJI&ab_channel=RoyalObservatoryGreenwich

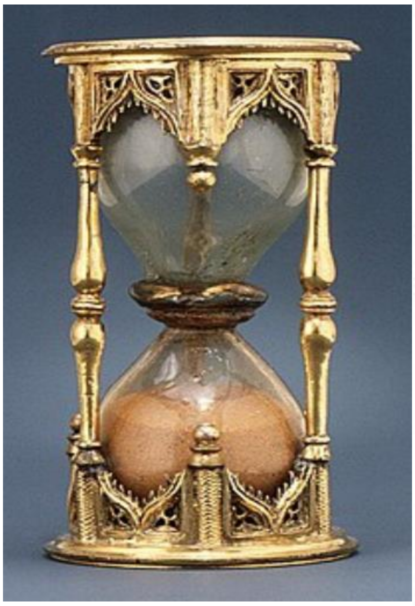
Povijest mjerenja vremena predstavimo počevši od korištenja sunčanih satova kod Sumerana kao mjerne jedinice za protok vremena, pri čemu sunčani sat koristi položaj Sunca na nebu kako bi se odredilo vrijeme u danu, a isto se i djeci može predočiti crtežom, odnosno vizualizacijom (Slika 46 i 47). Ljudi su proteklo vrijeme mjerili u početku štapovima zabodenim u zemlju, a kamenje poredano oko štapa je označavalo položaj sjene koja se tijekom dana kretala u krug. Sunčani sat jedan je od prvih izumljenih satova prije otprilike 5000 godina u Egiptu. Sadrži pokazivač, gnomon, čija sjena pokazuje koliko je sati. Danas ih srećemo još ponegdje, najčešće na starim zgradama. Kasniji narodi poznavali su razne vrste sunčanih satova te se služili i vodenim te pješčanim satovima.

Slika 48. Sunčani sat pomoću štapa i kamenja

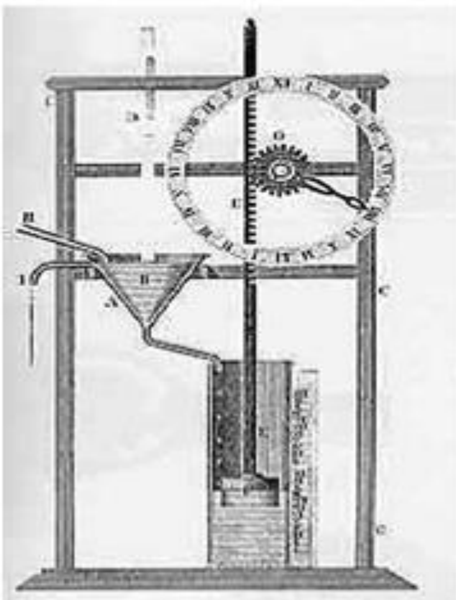
Izvor:

https://vrtic-cira-cara.hr/Dokumenti/Suncani_sat_i_sjene_1.5.2020.pdf

Slika 49. Pješčani sat



Slika 50. Vodeni sat



Izvor:

https://proofreadingpal.com/proofreading-pulse/professional-writing/what-tense-should-i-use-in-writing/

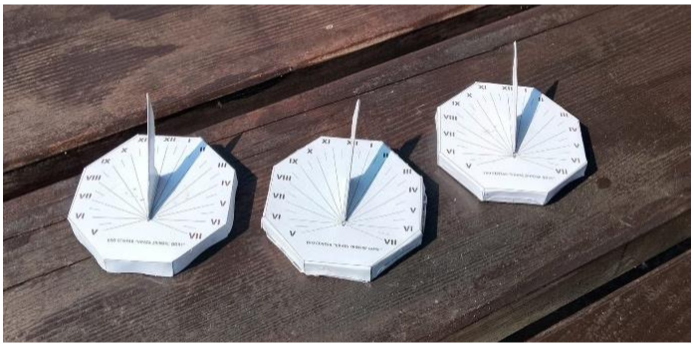
https://nova-akropola.com/mozaik/zanimljivosti/ktesibije/

„Etnolozi pokazuju koliko su snažno ostali ukorijenjeni raniji načini mjerenja vremena u kontekstu ljudskoga djelovanja. Na Madagaskaru, primjerice, i dalje postoji vremenska jedinica koja znači vrijeme koje je potrebno da se skuha riža tevrijeme koje je potrebno da se ispeče skakavac (Koselleck, 2019:304-305). Čak i osnovni kronometri naprednih civilizacija, koji su određivali protok vremena opadanjem razine materije (pijeska ili vode) i dalje su prilagođavani izvršenju konkretnih radnji –mjerili su duljinu propovijedi ili određivali vrijeme molitve ili su, poput Ciceronova vodenog sata (Slika 50), mjerili duljinu obraćanja poroti tijekom suđenja“ (Koselleck, 2019:304-305). Uz to, ljudi su se od davnina bavili poljoprivredom i uzgojem pa im je tako mjerenje vremena bilo nužno kako bi znali koliko će vremena proći da sazrije određeni plod (primjerice jabuka).

Učenici mogu samostalno, uz nadzor učitelja, izraditi sunčani sat na nekoliko različitih načina.

Sunčane dane i sjene iskoristimo za objašnjavanje kretanja Sunca te učenje strana svijeta. Potrebno je ujutro po dolasku u školu izaći s učenicima van te jedan učenik može stati na dogovoreno mjesto koje obilježimo kredom kao i obris sjene koju baca njegovo tijelo. Vraćamo se na isto mjesto po mogućnosti svaki sat i iscrtamo djetetovu sjenu te objasnimo kako se njegova sjena pomiče kako se Sunce kreće od istoka prema zapadu.

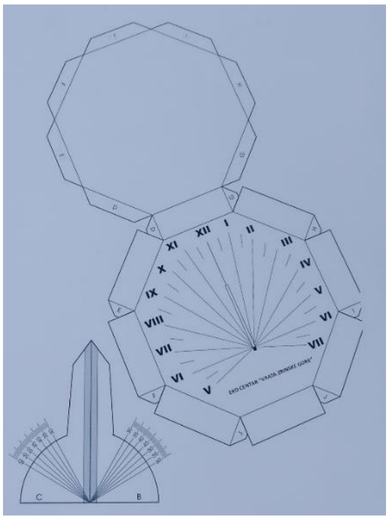
Slika 51. Sunčani sat izrađen prema gotovom predlošku



Izvor: https://www.facebook.com/human.sundial

Time u školskom dvorištu stvaramo sunčani sat, a po uzoru na njega radimo s djecom proporcionalne model, ili dajemo djeci model s tim da moraju izvršiti samostalno provjeru mjerenja i pozicioniranje sata.Razgovorom rezimiramo da su u trenutku izlaska Sunca sjene izdužene i usmjerene prema zapadu, dok penjanjem Sunca prema zenitu sjene se skraćuju (zenit je točka na nebeskoj sferi, najviša iznad horizonta). Najkraće su

Slika 52. Predložak za izradu sunčanog sata



Izvor:

https://www.facebook.com/human.sundial

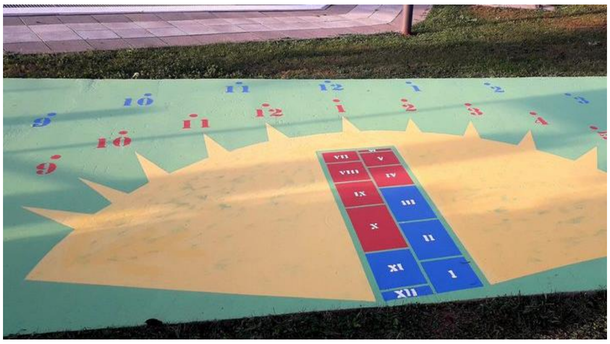
Slika 53. Izrada sunčanog sata

Izvor:

https://www.facebook.com/human.sundial

kada je Sunce u zenitu i usmjerene prema sjeveru, a pomicanjem Sunca prema zapadu postaju sve dulje i usmjerene prema istoku.

Slika 54. i 55. Sunčani sat u školskom dvorištu



Izvor: https://www.facebook.com/human.sundial

7. Zaključak

Geometrijski zadaci i istaknuti projektni zadaci su izvrstan način da učenici u osnovnoj školi razviju maštu, logično razmišljanje i vještinu rješavanja problema. Kroz praktičan rad s oblicima i prostorom, učenici bolje razumiju svijet oko sebe i postaju precizniji i uporniji. Takav rad s konkretnim je primjeren dobi razredne nastave, čini srž iskustvenog, aktivnog učenja. Geometrijski projekti povezuju ono što uče u školi s onim što vide u stvarnom životu. Kako istraživanja pokazuju da povijesni sadržaji obogaćuju nastavu matematike općenito i posebno geometrije, na način da pridonose razumijevanju geometrije kao i motiviranosti za učenje, ovakvi zadaci i projekti u kojima se provlači nit povijesnog otkrića posebno su poželjni u razrednoj nastavi.

Slijedom svega navedenog i na temelju iznesenih teorijskih, kao i praktičnih spoznaja, može se istaknuti kako je potrebno da učitelji matematike, počevši od nižih razreda osnovne škole implementiraju moderne tehnike poučavanja u svoj rad, a sve kako bi učenicima približili povijest matematike te ih motivirali za učenje geometrije, kao i matematike općenito.

8. Literatura

1) Allman Johnston, G. (2008). Greek geometry from Thales to Euclid. *Dublin Printed at the University Press:* Dublin.
2) Analitička geometrija (n.d.). Preuzeto 30.8.2024. sa: https://tehnika.lzmk.hr/tehnickaenciklopedija/analiticka_geometrija.pdf
3) Baranović, N. (2019). O učenju i poučavanju geometrije prema van Hiele- ovoj teoriji. Filozofski fakultet u Splitu, Split, Hrvatska.
4) Berlinski, D. (2011). Beskonačni uspon: kratka povijest matematike. Zagreb: Alfa.
5) Brückler, F.M. (2022). Povijest matematike. Pribavljeno 8.6.2024. sa https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/povmat_a
6) Čižmešija, A., Soucie, T., & Svedrec, R. (2012). Primjena geoploče u nastavi matematike. Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, 13(50), 25-39.
7) Dadić, Ž. (1992). Povijest ideja i metoda u matematici. Zagreb: Školska knjiga.
8) Definicija i zadaci kartografije. Pribavljeno 30.8.2024. sa: https://www.geoskola.hr/~gsurina/uvod_Kartografija.pdf
9) Dujić, L. (2017). Rezultati ispitivanja nekih temeljnih znanja iz elementarne geometrije kod studenata Učiteljskog studija. Školski vjesnik: časopis za pedagogijsku teoriju i praksu, 66(3.), 456-456.
10) Čuljak, M. (2013). *Starogrčka matematika.* Pribavljeno 30.8.2024. sa: https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/%C4%8CUL01.pdf
11) Đikić, S. (2013). *Razvoj matematike u srednjem vijeku.* Pribavljeno 13.6.2024. sa https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/%C4%90IK03.pdf.
12) Ebrahim, A. (2010). Origins of Mathematics.
13) Euklid i njegovi elementi (n.d.). Preuzeto 30.8.2024. sa: https://mapmf.pmfst.unist.hr/~gorerc/OG-materijali/ELEMENTI%20-%20prva%20knjiga.pdf
14) ELEMENTI I-VI (n.d.). Preuzeto 30.8.2024. sa: https://www.superknjizara.hr/hr/elementi-i-vi-1999-euklid
15) Favel, J. (1991). *Using History in Mathematics Education.* Pribavljeno 28.7.2024. sa: https://flm-journal.org/Articles/5B7A202B26495E83D7655D943808FF.pdf

16) Fitzpatrick, R. (2007). *Eucklid' Elements of Geometry*. Preuzeto 25.7.2024. sa: https://farside.ph.utexas.edu/books/Euclid/Elements.pdf
17) Geometrija – Descartes (n.d.). Preuzeto 30.8.2024. sa: https://hr.wikipedia.org/wiki/Geometrija_(Descartes)
18) Gleizer, G.I. (2003). *Povijest matematike za školu.* Zagreb: Školske novine.
19) Goktepe i sur. (2013). *An example of using history of mathematics in classes.* European Journal of Science and Education. 1(3):125-136.
20) Gusić, M. (2019/2020), Legende o tangramu. *Matka,* 109: 34-35.
21) Iliševic, D., & Bombardelli, M. (2007). Elementarna geometrija, skripta. Sveucilište u Zagrebu
22) Jablonski, S., & Ludwig, M. (2023). Teaching and Learning of Geometry—A Literature Review on Current Developments in Theory and Practice. Education sciences, 13(7), 682.
23) Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021). Moj sretni broj 4: udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
24) Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021). Moj sretni broj 4: zbrirka zadataka za matematiku u četvrtom razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
25) Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2023). Moj sretni broj 4: radna bilježnica za matematiku u četvrtom razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
26) Janeš, S. (2016). SUNCE-NAŠ VJERNI PRATITELJ (ISTRAŽIVANJE U NASTAVI MATEMATIKE). Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, 17(67), 50-63.
27) Jankov, D. (2011). Egipatski razlomci. Osječki matematički list, 11(1), 11-18.
28) Janjanin i sur. (2017). Analiza izmjere Keopsove piramide. Pribavljeno 16.7.2024. sa: https://master.grad.hr/hdgg/kog_stranica/kog21/beban-kog21.pdf.
29) Klaričić-Bakula, M. (2007). Uvod u matematiku. Prirodoslovno matematički fakultet u Splitu, Split.
30) Kralj, T. (2014). *Talesovi teoremi.* Pribavljeno 13.6.2024. sa https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A5572/datastream/PDF/view.
31) Krcadinac, V. NEEUKLIDSKA GEOMETRIJA.
32) Kosellek, R. (2019). Vrijeme i povijest. Pro tempore, (14), 303-312.
33) Lapaine, M. (2021). Kartografske projekcije. Pribavljeno 30.8.2024. sa: https://www.researchgate.net/publication/27188670_Kartografske_projekcije

34) Lascezski, K.M. (1997). *A study to integrate the history of mathematics into the geometry curriculum.* Pribavljeno 24.7.2024. sa: https://rdw.rowan.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3079&context=etd
35) Libl, M., & Mati, I. (2014). Plimpton 322. Matematika i škola, 73, 114-118.
36) Majstorović R. (2006). *Egipatska i babilonska matematička dostignuća.* Pribavljeno 16.7.2024. sa: preview (mathos.hr).
37) Markovac, J. (2001). Metodika početne nastave matematike. Školska knjiga.
38) Markovac, J., & Kulušić, Đ. (2005). Matematika 2: Metodički priručnik za učitelje.
39) Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2019). Super matematika za prave tragače: radni udžbenik za 1.razred osnovne škole, 2.dio. Zagreb: Profil Klett.
40) Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2019). Super matematika za prave tragače: radni udžbenik za 1.razred osnovne škole, 1.dio. Zagreb: Profil Klett.
41) Martić, M., Ivančić, G., Čupić, A., Martinić Cezar, J., Brničević Stanić, M. (2020). Super matematika za prave tragače: radni udžbenik za 2.razred osnovne škole, 2. dio. Zagreb: Profil Klett.
42) Martić, M., Ivančić, G., Čupić, A., Martinić Cezar, J., Brničević Stanić, M. (2020). Super matematika za prave tragače: radni udžbenik za 2.razred osnovne škole, 1. dio. Zagreb: Profil Klett.
43) Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Tkalčec, D., Lažeta, Željana. (2023). Super matematika za prave tragače: radni udžbenik za 3. razred osnovne škole, 2. dio. Zagreb: Profil Klett.
44) Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Tkalčec, D., Lažeta, Željana. (2023). Super matematika za prave tragače: radni udžbenik za 3. razred osnovne škole, 1. dio. Zagreb: Profil Klett.
45) Matijević, M., & Radovanović, D. (2011). Nastava usmjerena na učenika.
46) Mayoral – Villa (n.d.). Leonhard Euler and the seven bridges of Konigsberg: The beginning of Graph Theory. Preuzeto 30.8.2024. sa: https://margaritamayoralvilla.wordpress.com/2013/04/15/leonhard-euler-and-the-seven-bridges-of-konigsberg-the-beginning-of-graph-theory/
47) Merzbach, U.C. i Boyer, C.B. (2011). A History of Mathematics. Mcgraw-Hill: New York.

48) Metoda ekshaustije. Preuzeto 30.8.2024. sa: https://sh.wikipedia.org/wiki/Metoda ekshaustije

49) Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (NN 77/2019). Pribavljeno 30.8.2024. sa: https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html

50) Ostermann i sur., Geometry by its History. Pribavljeno 28.7.2024. sa: https://books.google.hr/books?hl=hr&lr=&id=eOSqPHwWJX8C&oi=fnd&pg=PR4&dq=geometry+history&ots=nlZOksB3ZE&sig=VTDJrPzXMQLPE-z65WmRgMMccZ4&redir_esc=y#v=onepage&q=geometry%20history&f=false

51) Pavlović, M. (2017). *Kako učiti i podučavati geometriju.* Pribavljeno 30.8.2024. sa: https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/PAV117.pdf

52) Poljak i sur. (2011). *Znanstveno-filozofski aspekti i Boškovićeva djela i utjecaj na razvoj klasične i moderne fizike.* Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Splitu.

53) Projektivna geometrija (n.d.). Preuzeto 30.8.2024. sa: https://www.enciklopedija.hr/clanak/projektivna-geometrija

54) Ratner, B. (2009). „Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him“. *A Closer Look*. 17 (229–242).

55) Romano, D. A. (2009). Van Hiele-ova teorija o učenju geometrije. Metodički obzori: časopis za odgojno-obrazovnu teoriju i praksu, 4(7-8), 95-103.

56) Scriba, C. J., & Schreiber, P. (2015). 5000 years of geometry: Mathematics in history and culture. Birkhäuser.

57) Singh H. i sur. (2016). *A Review: Contribution of Leonhard Euler in Mathematics.* 2249-9598 (6).

58) Slani, N., & Tomić, T. (2022). Oblik i prostor u ranom učenju matematike. DRUŠTVENE DEVIJACIJE, 7(1).

59) Sriraman, B. (2005). THE MONTANA MATHEMATICS ENTHUSIAST Volume 1, no. 1 [April 2004]. MONTANA MATHEMATICS ENTHUSIAST [ISSN 1551-3440], 2(1).

60) Sruk, S. (2022). TUCET ZADATAKA IZ PROŠLOSTI. Matka: časopis za mlade matematičare, 30(120), 221-227.

61) Starogrčka matematika prije Platona (n.d.). Pribavljeno 30.8.2024. sa: https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/povmat-02-2024.pdf

62) Stein, S. (1999). Archimedes: what did he do beside cry eureka? (Vol. 11). MAA.
63) Sukru Ozdemir i sur. (2012). *Using mathematics history to strengthen geometric proof skills.* Procedia - Social and Behavioral Sciences 46(3):1177-1181.
64) Teorija vjerojatnosti (n.d.). Preuzeto 30.8.2024. sa: https://www.enciklopedija.hr/clanak/teorija-vjerojatnosti
65) Tomić, T. (2020). Oblik i prostor u početnoj nastavi matematike (Doctoral dissertation, University of Rijeka. Faculty of Teacher Education).
66) Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M., ... & Siu, M. K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In History in mathematics education: The ICMI study (pp. 201-240). Dordrecht: Springer Netherlands.
67) Udovičić, K. (2019). Sličnost trokuta, Tales i računanje visina u razrednoj nastavi. Pribavljeno 2.9.2024. sa: https://repozitorij.unipu.hr/islandora/object/unipu:3145
68) Whitney-Smith, R., Hurrell, D., & Day, L. (2022). The Role of Mathematics Education in Developing Students' 21st Century Skills, Competencies and STEM Capabilities. Mathematics Education Research Group of Australasia.
69) Vlasnović, H., & Cindrić, M. (2014). Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema van Hieleovoj teoriji. Školski vjesnik: časopis za pedagogijsku teoriju i praksu, 63(1-2), 37-51.
70) Yadav, D. K. (2017). Exact definition of mathematics. International Research Journal of Mathematics, Engineering and IT, 4(1), 34-42.
71) Zebić, J. (2014). *Matematika prije Pitagore.* Pribavljeno 9.6.2024. sa: https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf:5598
72) Ziegler, R. (1998). The discovery of non-Euclidean geometries and its consequences: observations on the history of consciousness in the nineteenth century. Magazine of morphology, 1, 3-32.

9. Prilozi