Primjena singapurske metode modela u razrednoj nastavi

Petrovska, Angela

SVEUČILIŠTE U RIJECI

UČITELJSKI FAKULTET U RIJECI

Angela Petrovska

Primjena singapurske metode modela u razrednoj nastavi matematike

DIPLOMSKI RAD

Rijeka, listopad, 2024.

SVEUČILIŠTE U RIJECI

UČITELJSKI FAKULTET U RIJECI

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni učiteljski studij

Primjena singapurske metode modela u razrednoj nastavi matematike

DIPLOMSKI RAD

Predmet: Metodika matematike

Mentor: dr.sc. Neva Slani, v. pred.

Studentica: Angela Petrovska

Matični broj: 0299013839

Rijeka, listopad, 2024.

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

„Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da sam rad izradio samostalno, uz preporuke i savjetovanja s mentorom. U izradi rada pridržavao sam se Uputa za izradu diplomskog rada i poštivao odredbe Etičkog kodeksa za studente Sveučilišta u Rijeci o akademskom poštenju."

Petrovska

Potpis studenta

ZAHVALA

Iskreno zahvaljujem svojoj mentorici dr. sc. Nevi Slani, v. pred., na povjerenju, strpljivom vođenju i dragocjenim uputama tijekom izrade diplomskog rada. Njezini prijedlozi su bili ključni za oblikovanje mog rada i razmišljanja tijekom pisanja.

Od srca zahvaljujem svojoj obitelji koja je bila moj najveći oslonac tijekom ovog putovanja. Zahvaljujem na ljubavi i razumijevanju te podršci koja me motivirala u izazovnim trenucima. Posebno zahvaljujem svojim roditeljima koji su moje izbore prihvatili kao svoje i danas se njima ponose.

Uz moju obitelj, velike zahvale dugujem prijateljicama s fakulteta na zajedničkim trenucima, smijehu i uspomenama. Njihova prisutnost je ovaj studij učinila nezaboravnim iskustvom.

Zahvaljujem prijateljima koji su razumjeli svrhu pisanja ovog rada čitajući zadatke i rješavajući ih poput malih učenika. Zahvaljujem im na svim saslušanjima i savjetima.

Osvrnem li se oko sebe, osjetim zahvalnost. Osjetim, zahvaljujući Vama!

SAŽETAK

Cilj ovog diplomskog rada bio je istražiti primjenu singapurske metode modela u poučavanju matematike u osnovnoj školi s posebnim naglaskom na razvijanju sposobnosti rješavanja problemskih zadataka riječima. Ova metoda obuhvaća KSA (konkretno-slikovito-apstraktno) pristup učenja, odnosno prati IGSZ (izražavanje-govor-slika-znak) shemu u procesu rješavanja problema. Kroz ovu strukturu učenici postepeno prelaze s manipulacije konkretnim objektima na grafičko-aritmetička prikazivanja što olakšava razumijevanje zadatka i čini rješavanje intuitivnijim. Glavni alat metode su pravokutnici odnosno blokovi kojima se vizualizira struktura zadatka. Započinje primjenom osnovnih računskih operacija te se postupno proširuje na zadatke s nepoznanicama u različitim kontekstima. Ovaj pristup omogućuje rješavanje specifičnih zadatak koji učenicima često mogu izgledati nejasni i komplicirani, a često vode ka odustajanju. Metoda donosi ključnu prednost jer daje jasnu strukturu takvim zadacima te stvara temelj za samopouzdano rješavanje. Međunarodni rezultati istraživanja kao i druga istraživanja unutar nekoliko zemalja potvrđuju učinkovitost ove metode. Time se metoda modela definira kao inovativan i učinkovit pristup rješavanja matematičkih problema. U radu su predstavljeni prijedlozi prilagodbe metode modela vođeni kurikulom matematike.

Ključne riječi: *singapurska metoda, metoda modela, rješavanje problema, pravokutnici*

SUMMARY

The aim of this thesis was to investigate the application of the Singapore model method in teaching mathematics in primary schools, with a particular emphasis on developing the ability to solve word problems. This method encompasses the CPA (Concrete-Pictorial-Abstract) approach to learning and follows the ELPS (Experience-Language-Pictures-Symbols) scheme in the problem-solving process. Through this structure, students gradually transition from manipulating concrete objects to graphical-arithmetic representations, which facilitates task understanding and makes solving problems more intuitive. The main tools of the method are rectangles, or blocks, which visualize the structure of the task. It begins with the application of basic arithmetic operations and gradually expands to tasks with unknowns in various contexts. This approach enables the resolution of specific tasks that may often appear unclear and complicated to students, frequently leading to disengagement. The method provides a key advantage by offering a clear structure for such tasks, establishing a foundation for confident problem-solving. International research results, as well as studies from several countries, confirm the effectiveness of this method. Thus, the model method is defined as an innovative and effective approach to solving mathematical problems. The thesis presents proposals for adapting the model method guided by the mathematics curriculum.

Key words: *Singapore method, model method, problem-solving, rectangles, bar modeling*

SADRŽAJ

Sadržaj

1. UVOD

U današnjem školskom sustavu jasno se uočava kontinuirana težnja ka unaprjeđenju obrazovanja i povećanju zadovoljstva učenika. Određeni aspekti obrazovanja zaslužuju poseban fokus s obzirom na njihovu ključnu ulogu u razvoju djeteta. Jedan od aspekata je matematička pismenost kao temelj u razvoju kritičkog razmišljanja i rješavanja problema. Kako bi se to osiguralo, potrebno je stvaranje okruženja u kojemu učenici razvijaju pozitivan stav prema matematici. Mnoga istraživanja su pokazala nezadovoljstvo učenika koje proizlazi iz nerazumijevanja određenih segmenata matematike, a odnosi se na rješavanje problemskih zadataka. Singapurska metoda modela, poznata po jednostavnosti, učinkovitosti i vizualnom pristupu učenju matematike, već desetljećima stječe međunarodna priznanja zbog svojih iznimnih rezultata iz matematike. Metoda je razvijena u Singapuru 1980-ih godina, a oslanja se na rješavanje matematičkih problema pomoću grafičkih modela primjenjujući KSA pristup.

Cilj rada je definirati i primijeniti relevantnu metodu modela kao rješenje za poučavanje matematike, konkretnije rješavanje problemskih zadataka s kojima se učenici svakodnevno suočavaju. Na početku rada je pružen povijesni pregled obrazovnog sustava Singapura te razvoj kurikula. Zatim slijedi pregled primjene metode unutar singapurskog kurikula i unutar kurikula drugih zemalja. Posebno se analizira metoda modela i metode prikazivanja pravokutnicima koje olakšavaju vizualizaciju zadataka. Nadalje su istaknuta međunarodna ispitivanja koja dokazuju njezinu izvrsnost te suvremeni teorijski pristupi brojnih psihologa prema kojima je utemeljena. Zatim slijede prijedlozi primjene metode u razrednoj nastavi prema matematičkom kurikulu razredne nastave koji su obogaćeni zadacima za dodatnu nastavu. Nakon prijedloga primjene metode slijedi zaključak te popis korištene literature.

2. POVIJEST METODE

Povijest singapurske metode oslanja se na brojne promjene i promicanja obrazovnog sustava Singapura koji je od svoje samostalnosti doživio mnoge uspone i padove. Danas ga definiraju kao jednu od vodećih zemalja u obrazovanju, što potvrđuju brojna istraživanja. Promatrajući napredovanje obrazovanja Singapura, mogu se definirati tri ključne faze. Prva faza, *survival-driven phase* (faza vođenja preživljavanjem) započela je 1959. godine nakon što je Stranka narodne akcije *(Peoples"s Action Party / PAP)* došla na vlast. Započeto je provođenje Petogodišnjeg obrazovnog plana čije su glavne značajke jednak tretman četiriju jezičnih struja, postavljanje malajskog jezika kao nacionalnog te naglašavanje važnosti matematike, znanosti te tehničkih predmeta (Kaur, 2014). Tadašnji cilj singapurskog obrazovanja bio je proizvesti dobrog čovjeka i korisnog građanina". U tom je razdoblju vlada pokrenula postupak izgradnje škola, edukacije i zapošljavanja učitelja osiguravajući time mogućnost obrazovanja sve djece. To je dovelo do uspostavljanja jedinstvenog osnovnog obrazovanja 1965. godine, a nedugo zatim i srednjoškolskog obrazovanja. Zadnjih godina prve faze stvoren je i nacionalni sustav javnog obrazovanja (OECD, 2011). 1975. godine je Ministarstvo obrazovanja Singapura provelo istraživanje o učeničkim postignućima u računanju. Rezultati su pokazali minimalnu razinu znanja što je dovelo do modificiranja dotadašnjeg obrazovnog sustava (Kaur, 2019). Prva faza je završila 1978. godine. Druga faza, *efficiency-driven phase* (faza vođena efikasnošću), trajala je od 1979. do 1996. godine te je promijenila svoj fokus. Dotadašnji cilj širenja obrazovanja svoje središte smjestilo je na efikasnost. Uspostavljeno univerzalno osnovno obrazovanje zamijenio je Novi obrazovni sustav (NES) predstavljen 1979. godine. Cilj NES-a je bio omogućiti da svaki učenik ostvari maksimalni potencijal vlastitim tempom, čime se predložilo grupiranje učenika prema sposobnostima u osnovnim i srednjim školama. Oslanjajući se na Novi obrazovni sustav, godinu kasnije uspostavljen je Institut za razvoj kurikula Singapura (CDIS) kako bi se unaprijedila nastava i učenje unutar škola promicanjem i unaprjeđivanjem kvalitete kurikula te obukom učitelja i nastavnika (Kaur, 2014). U sklopu Instituta za razvoj kurikula, tim Projekta osnovne matematike, pod vodstvom Tek Hong Khoa, razvio je osnovne matematičke udžbenike koji su bili standard singapurskih škola. U njima su po prvi put predstavili metodu modela, koja je bila prepoznatljivo obilježje tih udžbenika za osnovnu školu (Kho, Yeo, Fan, 2014). Treća faza, *ability-based, aspiration-driven phase* (faza vođena prema sposobnostima i težnjom), trajala je od 1997. godine pa sve do danas te je dobila novu obrazovnu viziju pod nazivom „Škole koje misle, nacija koja uči". Ciljevi te misije obuhvaćali su vještine kreativnog razmišljanja i želju za cjeloživotnim učenjem s učenikom u središtu obrazovanja. Naglasak je bio na prilagođavanju učeničkim sposobnostima i interesima, pružajući fleksibilnost i slobodu. Godine 2005. zasnovana je inicijativa „Učiti manje, naučiti više" kojom se promijenila interakcija između učitelja i učenika, oslobađajući prostor u kojemu bi učenici bili više uključeni u proces učenja. Cilj inicijative oslanjao se na kvalitetu obrazovanja objašnjavajući učenicima zašto se poučava, što se poučava i kako se poučava. Smanjivanje učenja odnosilo se na smanjenje učenja napamet i ponavljanje jednakih zadataka, naglašavajući mogućnost izražavanja te učenje za svakodnevni život (Kaur, 2014).

2.1. Primjena u singapurskom kurikulu

Evolucija singapurskog kurikula usklađena je s razvojem obrazovnog sustava Singapura. Iako je predstavljen 1979. godine, Novi obrazovni sustav implementiran je dvije godine kasnije. Prateći glavni cilj NES-a, koji definira obrazovanje svakog djeteta, a potaknuti niskim postignućima iz matematike, CDIS je odlučio razviti osnovni matematički kurikul. On je uključivao detaljni program, udžbenike, radne bilježnice i vodiče za učitelje. U suradnji s učiteljima matematike i timom Ministarstva obrazovanja izrađen je prvi kurikul koji je usvojio KSA pristup za učenje i poučavanje matematike. KSA (konkretno-slikovito-apstraktno) pristup uvodi učenike u učenje matematiku kroz konkrete, opipljive predmete koji omogućuju da se apstraktno približi stvarnome. Uz pomoć tog pristupa učenici se pri susretanju s problemskim zadacima mogu koristiti različitim predmetima kako bi modelirali problem na konkretan način. Dvije godine kasnije tim koji je radio na izradi materijala kurikula, pod vodstvom Tek Hong Khoa, predstavio je metodu modela kao rješenje za poteškoće prilikom rješavanja problemskih zadataka. Identificirajući probleme s kojima se učenici suočavaju prilikom rješavanja problemskih zadataka kao bolje rješenje od primjene algebarske metode Tek Hong Kho definirao je metodu modela kao manje apstraktnu i prikladniju za rješavanje takve vrste zadataka (Fong, Ng, 2022.) Prvi put je sustavno uvedena u udžbenike matematike za četvrti razred osnovne škole objavljene 1983. godine (Kho, Yeo, Fan, 2014). Krajem 1980-ih godina uvrštena je u kurikule petog i šestog razreda (Kaur, 2014). Metoda je 1990-ih godina uvedena u udžbenike trećeg razreda, a desetak godina kasnije i u udžbenike drugog razreda, čime je postala jedna od osnovnih metoda poučavanja u razrednoj nastavi matematike (Kho, Yeo, Fan, 2014).

Današnji singapurski matematički kurikul prati spiralni model koji se odlikuje sustavnim produbljivanjem i proširivanjem nastavnih metoda kroz godine obrazovanja. U prva dva razreda osnovne škole kurikul naglašava korištenje konkretnog pristupa za uvođenje metode modela, uključujući uporabu fizičkih objekata. Zatim se za rješavanje jednostavnih aritmetičkih zadataka količine počinju predstavljati pravokutnicima. Iako se gradivo na daljnjim razinama obrazovanja proširuje, problemski ga zadaci ne prate u potpunosti radi dubljeg i pomnijeg razumijevanja odnosa prikazanih u određenom problemskom zadatku. U prvom i drugom razredu učenici se usredotočuju na operacije zbrajanja i oduzimanja. U trećem razredu metoda modela koristi se za predstavljanje i rješavanje problemskih zadataka koji uključuju množenje i dijeljenje. Kurikul zadržava prikazivanje pravokutnicima tijekom cijele razredne nastave, pri čemu se raspon brojeva povećava svake godine (Fong, Ng, 2022).

2.1.1. Matematički okvir singapurskog matematičkog kurikula

Svrha Odbora za reviziju programa matematike osnovanog 1988. godine bila je pregledavanje i revidiranje matematičkih programa koji su dotada bili u upotrebi. Smatrali su da uz primarni cilj, a to je uspješno rješavanje matematičkog problema, potrebno stvoriti okvir kojim bi se taj isti i postigao (Kaur, 2014). Isti je uveden 1990. godine u osnovne škole i niže razrede srednjih škola kao dio nastavnog plana i programa, a 2003. godine formalno je proširen na sve razine obrazovanja (Širić, 2017). Okvir je obuhvaćao pet međusobno povezanih komponenata, a to su metakognicija, procesi, koncepti, vještine i stavovi. Prvi aspekt je metakognicija koja uključuje svijest o vlastitim misaonim procesima, njihovo praćenje i regulaciju. Ona se odnosi na učenikovo aktivno praćenje i refleksiju vlastitog učenja, s ciljem unaprjeđenja i planiranja daljnjeg napretka. Drugi aspekt obuhvaća procese kao što su apstrahiranje i zaključivanje te kompetencije u prikazivanju, komunikaciji, primjeni i modeliranju matematičkih problema. Treći aspekt, koncepti, odnose se na razumijevanje svojstava i odnosa, operacija i algoritama, kao i matematičkih koncepata u cjelini. Četvrti ključni aspekt odnosi se na vještine koje su potrebne za izvođenje operacija i algoritama, vizualizaciju prostora, rukovanje podacima te korištenje matematičkih alata. Peti aspekt obuhvaća stavove, uključujući uvjerenja, zahvalnost, samopouzdanje, motivaciju, interes i ustrajnost (Tan, Low, Tay, Yan, 2021).

Singapurski matematički kurikul pažljivo je osmišljen kako bi se osigurala postupnost u učenju matematičkih pojmova i vještina uz istodobno poticanje razumijevanja. Omogućuje pregledavanje važnih pojmova koje bi učenici trebali usvojiti prije polaska u svaku sljedeću razinu obrazovanja. Nastavni plan i program jasno ističe potrebna predznanja i usvajanja koja slijede u svakoj školskoj godini. Iako se opseg gradiva povećava, omogućuje ponavljanje i vježbanje tema koje su prethodile nadolazećoj[1].

2.2. Primjena singapurske metode u drugim kurikulima

Singapurska metoda poučavanja matematike implementirana je u kurikule mnogih zemalja nakon što su singapurski učenici postigli visoke rezultate na međunarodnim procjenama TIMSS i PIRLS. Takav uspjeh potaknuo je druge zemlje da usvoje jednake metode s ciljem poboljšanja rezultata iz matematike. Vlada Ujedinjenog Kraljevstva 2016. je godine uložila 41 milijun funti kao podršku školama pri usvajanju pristupa poučavanja temeljenog na istočnoazijskim metodama, što uključuje i Singapur. Inicijativa se odnosila na kupnju udžbenika i obuku učitelja kako bi se usvojili pristupi koji osiguravaju da svaki učenik temeljito razumije osnovne koncepte matematike prije prelaska na sljedeće, što se u potpunosti razlikovalo od dotadašnjeg nastavnog plana i programa Ujedinjenog Kraljevstva. Rezultati istraživanja su pokazali mali, ali značajan pozitivan učinak korištena materijala singapurske metode (Lindorff, Hall, Sammons, 2019). Sjedinjene Američke države su na drugačiji način implementirale singapurski model. Najraniji usvojitelji metode su bili roditelji čija su se djeca obrazovala kod kuće, poznatije kao *homeschooling* te mali broj škola koje su čule za metodu. Vremenom se proširila na javne škole, uključujući škole u New Yorku i Washingtonu (Tan, 2020). Prema

---

[1] ESingaporeMath. *What is Singapore Math?* Pribavljeno 2. rujna .2024., sa https://esingaporemath.com/what-is-singapore-math

podatku koji datira iz 2007. godine, singapurskim se udžbenicima koristilo više od 600 škola u Sjedinjenim Američkim Državama te mnogo učenika koji prakticiraju *homeschooling* (Hoven, Garelick, 2007). Fong Ho Kheong je jedan od vodećih pionira u korištenju singapurske metode koja je ujedno i osnova za programe „*BrainBuildera*". Oni se koriste u više od 20 centara za učenje koji djeluju u Australiji, Maleziji, Singapuru i Tajlandu te uskoro započinju s programom u Kanadi i SAD-u[2]. Uz taj program, još jedan od poznatijih je S.A.M/ *Seriously addictive mathematics* koji koristi singapurski kurikul poučavanja matematike. Program obuhvaća učenike od predškolske do srednjoškolske dobi, a bavi se razvijanjem dubljeg razumijevanja matematičkih koncepata i poboljšanjem matematičkih vještina. Taj je program prisutan u 190 centara na području 18 zemalja uključujući SAD, Kanadu, Australiju, Ujedinjene Arapske Emirate i Filipine[3].

Unatoč posvećenosti primjeni metode modela u rješavanju problemski zadataka u Sjedinjenim Američkim Državama, učenici iz Singapura i dalje ostvaruju bolje rezultate. Ključna razlika leži u tome što je rješavanje problema ugrađeno u srž singapurskog kurikula, odnosno sastavni dio nastavnih materijala. Nadalje, problemski zadaci s kojima se susreću singapurski učenici su složeniji od onih u SAD-u. Na svakoj razini obrazovanja su prisutni različiti tipovi zadataka (logički, životni) što omogućuje razvijanje različitih pristupa rješavanju. Metoda modela se uvodi sustavno, poučava se u početnom rješavanju zadataka riječima, ali seže do složenijih i kompleksnijih zadataka. Posljednji čimbenik se ističe u podršci koju učenici dobivaju tijekom poučavanja. Pridaje se iznimna važnost stavovima učenika prema matematici, kao i prema rješavanju određenog problema (Clark, 2009).

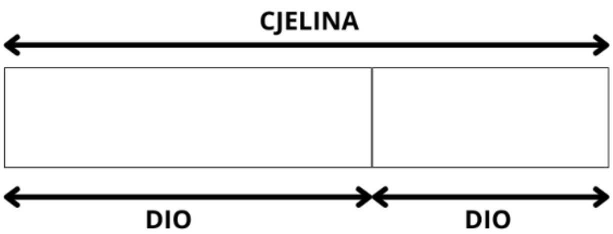
---

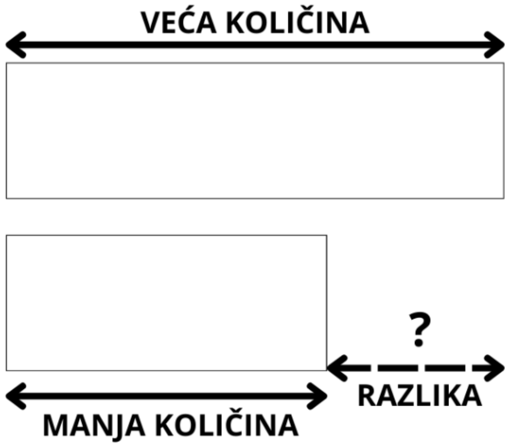
[2] BrainBuilder. *About Dr Fong.* BrainBuilder.DR. Fong Singapore Maths. Pribavljeno 3. kolovoza 2024., sa https://brainbuildermaths.com/dr-fong/

[3] Seriously Addictive Mathematics (S.A.M). *About Us*. Seriously Addictive Mathematics (S.A.M). Pribavljeno 3. kolovoza 2024., sa https://sam-wa.au/about-us/

3. METODA MODELA

Naziv *metoda modela* razvijen je u Singapuru 1980-ih godina, a kasnijih je godina u Ujedinjenim Američkim Država kreiran naziv *bar modeling* (model blokova). Danas se u različitim matematičkim programima koristi pod sličnim nazivima, a neki od njih su *tape diagrams* (linijski dijagram) i *strip diagrams* (dijagram podijeljen u segmente)[4]. Ona je ujedno grafičko-aritmetička metoda, odnosno alat za rješavanje algebarskih i aritmetičkih zadataka, a podrazumijeva grafičko prikazivanje poznatih i nepoznatih veličina u zadatku. Metoda potiče učenike na korištenje konkretnih materijala koji olakšavaju razumijevanje osnovnih matematičkih pojmova (Jukić Matić, Mužar Horvat, Bognar, 2024). Obuhvaća sve informacije pružene u jednom zadatku što omogućuje globalni pregled problema. Objedinjuje rješavanje zadataka prema *modelu dio-cjelina* te *modelu usporedbe*.





Oba su modela primjenjiva u četirima računskim operacijama. Modeli omogućuju vizualizaciju strukture problema i razumijevanje kvalitativnih odnosa triju varijabli unutar zadatka. Varijable unutar modela dio- cjelina su prvi dio, drugi dio i cjelina dok su u modelu usporedbe veća količina, manja količina te njihova razlika.

[4] ESingaporeMath. *What is Singapore Math?* Pribavljeno 2. rujna .2024., sa https://esingaporemath.com/what-is-singapore-math

U modelu dio- cjelina mogu biti zadani dijelovi i cjelina (zbrajanje i oduzimanje)

a) Zadani dijelovi, a traži se cjelina

   dio + dio = cjelina

b) Zadana cjelina i dio, a traži se drugi dio

   cjelina – dio (1) = dio (2)

U modelu cjelina može biti podijeljena na jednak broj dijelova (množenje i dijeljenje)

a) Zadani dijelovi i broj dijelova, a traži se cjelina

   dio x broj dijelova = cjelina

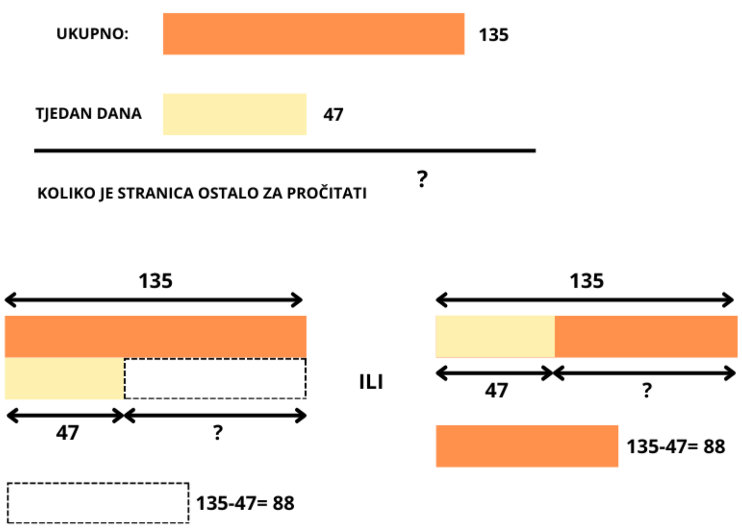
b) Zadana cjelina i broj dijelova, a traži se dio

   cjelina ÷ broj dijelova = dio

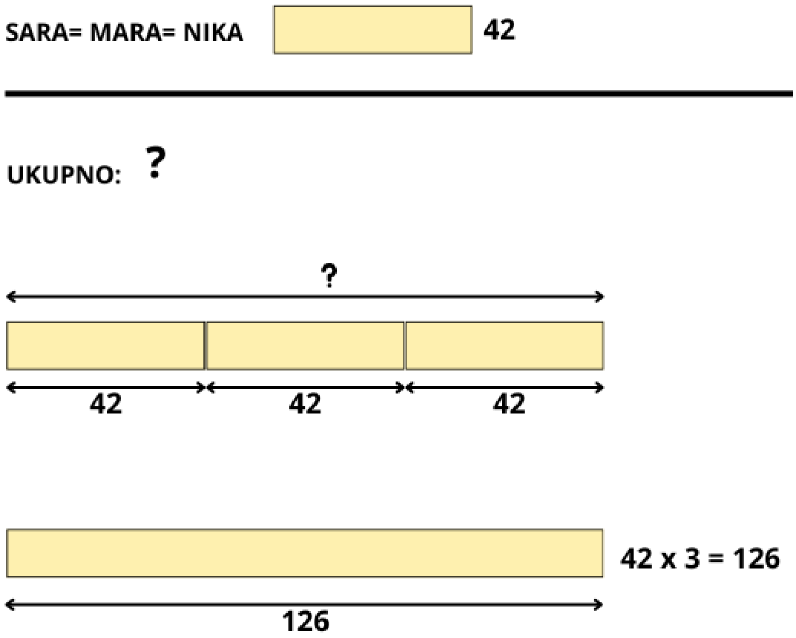
c) Zadana cjelina i dijelovi, a traži se broj dijelova

   cjelina ÷ dio = broj dijelova

Primjer 1. *Lucija čita lektiru koja ukupno ima 135 stranica. U tjedan dana je pročitala 47 stranica, koliko joj je stranica ostalo za pročitati?*



Primjer 2. *Sara, Mara i Nika su igrale pikado. Svaka je skupila 42 boda. Koliko bodova imaju zajedno?*



U modelu usporedbe se uspoređuju dvije količine kako bi se dokazalo koja je veća odnosno manja (zbrajanje i oduzimanje).

a) Zadane su manja količina i razlika, a traži se veća količina
manja količina + razlika = veća količina
b) Zadane su veća količina i razlika, a traži se manja količina
veća količina – razlika = manja količina
c) Zadane su veća i manja količina, a traži se razlika
veća količina – manja količina = razlika

U modelu usporedbe dvije količine mogu biti povezane tako što je jedna višekratnik druge. Termini koji se koriste su veća i manja količina te omjer koji je uvijek prirodan broj (množenje i dijeljenje).

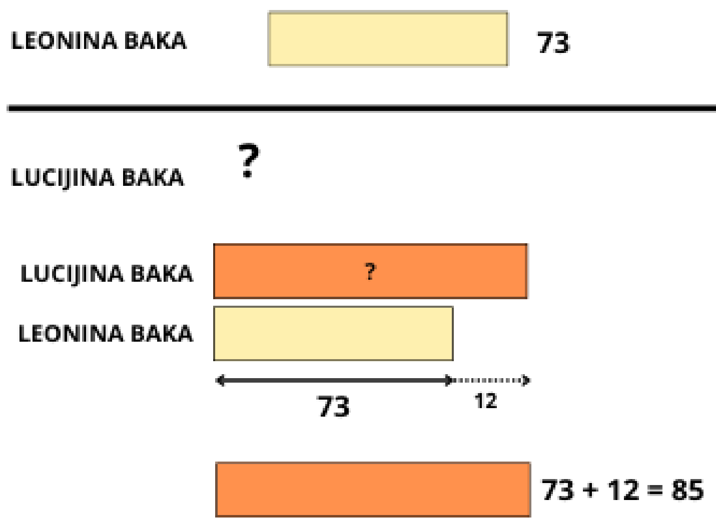
a) Zadane su manja količina i omjer, a traži se veća količina
manja količina x omjer = veća količina
b) Zadane su veća količina i omjer, a traži se manja količina

veća količina ÷ omjer = manja količina

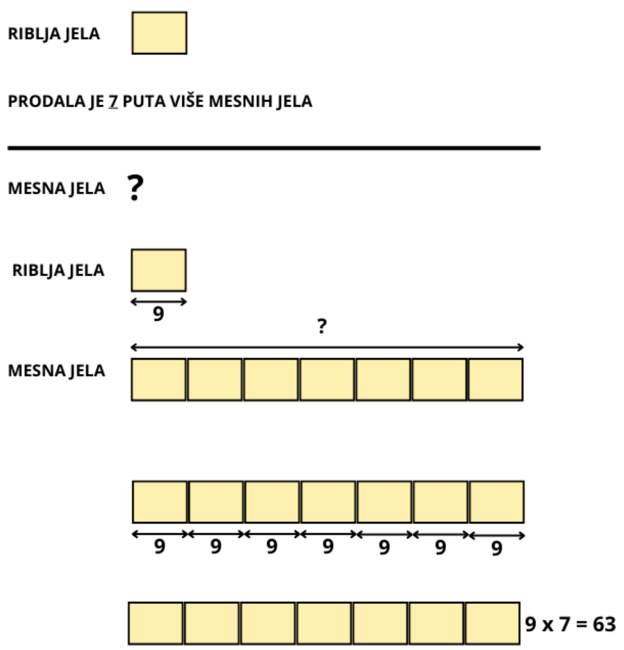
c) Zadane su veća i manja količina, a traži se omjer

veća količina ÷ manja količina = omjer

Primjer 3. *Leonina baka ima 73 godine. Ona je 12 godina mlađa od Lucijine bake. Koliko godina ima Lucijina baka?*



Primjer 4. *Janjina majka vodi restoran. Večeras je prodala 9 ribljih jela i 7 puta više mesnih jela. Koliko je mesnih jela prodala?*



Proširivanjem i produbljivanjem gradiva u oba se modela mogu javiti više od tri varijable, pri čemu su određene varijable poznate (Kho, Yeo, Fan, 2014). Usmjeravajući se na rješavanje problemskih zadataka, srž metode modela je prikazivanje istih. Ističu se tri specifične faze koje učenik prolazi prilikom rješavanja zadataka, a one su tekstualna faza, strukturna faza i simbolička faza. Prva definira čitanje informacija iz teksta, prvobitno se odnosi na razumijevanje konteksta zadatka, a u drugom čitanju učenici poimaju što je u zadatku zadano odnosno što nije. Svaku datu informaciju učenik strukturira u model. U strukturnoj fazi učenici pročitane informacije strukturiraju u modele odnosno pravokutnike. Isprva iz teksta izvlače poznate količine te ih predstavljaju, a zatim nepoznate. Fokus je na pravilnom predstavljanju svake zadane informacije, stoga se učenici stalno vraćaju u tekstualnu fazu kako bi provjerili jesu li iscrpili sve informacije iz zadatka. Prijelaz između strukturne u proceduralno-simboličku fazu se odvija nakon izrade modela. Ona definira rješavanje zadatka koja ovisi o već navedenim međusobno povezanim komponentama koje igraju ključnu ulogu u pravilnom rješavanju zadataka (Fong Ng, Lee, 2009).

3.1. Što omogućuje singapurska metoda

Singapurska metoda je usredotočena na rješavanje matematičkih zadataka koji se postižu strukturiranim konceptima, vodeći se KSA (konkretno-slikovito-apstraktno) pristupom koji pomaže učenicima da postepeno razvijaju razumijevanje matematičkih koncepata. Taj pristup obuhvaća brojčane veze, metodu modela te mentalnu matematiku. Brojčane veze predstavljaju osnovu za razumijevanje odnosa među brojevima i prethode poučavanju modela pravokutnicima. Prva, konkretna faza prikazivanja KSA pristupa odnosi se na korištenje konkretnih objekata za modeliranje problema. Slikovita faza prikazivanja obuhvaća slikovne odnosno grafičke prikaze koji olakšavaju vizualizaciju. U toj se fazi učenike potiče da uspostave mentalnu vezu između fizičkog predmeta i slike ili modela na papiru. Crtanje modela odnosno pravokutnika, učenicima olakšava shvaćanje apstraktnih matematičkih pojmova. U apstraktnoj/simboličkoj fazi prikazivanja učenici se koriste simbolima za modeliranje problema. Ključ dolaska do apstraktne faze jest pomno razumijevanje prvih dviju faza. U posljednjoj fazi učitelj uvodi učenike u apstraktne pojmove odnosno matematičke simbole za izvođenje četiriju računskih operacija. Cilj je osvijestiti učenike da se prilikom rješavanja matematičkih zadataka oslone na matematičko razmišljanje koje se ostvaruje povezivanjem novog gradiva s prethodim. Ujedno je bitno da učenici osvijeste važnost i pristupačnost matematike. Singapurska matematika omogućuje učenicima da se osjećaju samopouzdano i snalažljivo jer upravo konceptualno razmišljanje produbljuje matematičko razmišljanje[5]. Singapurski udžbenici odišu jednostavnošću i jasnoćom, pri čemu su koncepti vrlo jasno strukturirani. Objašnjenja su ukratko naznačena kako bi i učenici s poteškoćama u čitanju ili u razumijevanju matematike mogli usvojiti metodu (Hoven, Garelick, 2007).

3.2. Dokaz njenih blagodati

Najznačajnija međunarodna studija TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) koja se bavi procjenom postignuća učenika u matematici, prikazala je prve izvrsne rezultate singapurskih učenika. TIMSS 1995. proveden iste godine predstavljao je prvi ciklus procjene trendova u postignućima učenika, nastavnika i ravnatelja škola u područjima matematike i prirodnih znanosti, obuhvaćajući pritom kurikule tih predmeta. Uzorak je obuhvaćao učenike četvrtog i osmog razreda osnovne škole, a ispitivanje se provodilo tijekom 1994. i 1995. godine (International Association for the Evaluation of Educational Achievement, 1995). Singapur je sudjelovao na tom međunarodnom ispitivanju, a rezultati su izvijestili da su se učenici četvrtog razreda istaknuli među najboljima uz učenike iz Koreje. (International Association for the Evaluation of Educational Achievement, 1995).

Međunarodno istraživanje se provodi svake četiri godine te je do sada uspješno provedeno osam puta, a najnoviji rezultati datiraju iz 2023. godine. Od 1999. godine, singapurske škole kontinuirano postižu izvanredne rezultate u međunarodnim procjenama postignuća učenika u matematici. Te su godine škole zauzele prvo mjesto na TIMSS-ovoj ljestvici, a 2003. godine su se ponovno istakle na vrhu ljestvice, pri čemu su učenici četvrtih razreda pokazali značajan napredak u prosječnoj vrijednosti uspjeha u usporedbi s rezultatima iz 1995. godine. U 2007. godini, učenici četvrtih razreda su zauzeli drugo mjesto iza Hong Konga, dok su učenici osmih razreda također zauzeli drugo mjesto, ali iza Koreje. Između 1995. i 2007. godine, rezultati učenika osmih razreda singapurskih škola su pokazali

[5] Singapore Math https://www.singaporemath.com/pages/what-is-singapore-math

minimalnu stagnaciju. Prema istraživanju iz 2011. godine, učenici četvrtih razreda su se vratili na prvo mjesto, dok su učenici osmih razreda ostali na drugom mjestu iza Koreje. Rezultati istraživanja iz 2015. godine pokazali su da su učenici singapurskih škola, kao u četvrtom, tako i u osmom razredu, zauzeli prvo mjesto na ljestvici, što je ponovno potvrđeno i u istraživanju provedenom 2019. godine. Rezultati najnovijeg istraživanja iz 2023. godine još nisu dostupni[6].

Singapur je također sudjelovao na istraživanjima PISA (*Programme for International Student Assessment)* koja su pokrenuta od strane Organizacije za ekonomsku suradnju i razvoj (OECD) 1997. godine. To istraživanje procjenjuje obrazovne sustave ispitujući u kojoj su mjeri učenici na kraju obrazovanja sposobni primijeniti usvojeno znanje u stvarnim i životnim situacijama. Provodi se svake tri godine, obuhvaćajući matematiku, znanost i čitanje, pri čemu je samo jedan segment uvijek u fokusu. Matematika je bila u fokusu 2012. godine. Te je godine Singapur zauzeo drugo mjesto s prosječnim rezultatom od 573 bodova, što je znatno manje od Kine, ali više od Hong Konga. Sudjelovanje u istraživanjima TIMSS i PISA omogućuje članicama, uključujući Singapur, usporedbu ishoda školovanja s obrazovnim standardima, stjecanjem uvida u napredne obrazovne sustave, unaprjeđenje školskog kurikula i praćenje globalnog napretka (Tan, Low, Tay, Yan, 2021).

Visoke rezultate učenika iz Singapura koji su ostvareni na već navedenim međunarodnim ispitivanjima iz matematike potakli su druge zemlje da usvoje temeljne pristupe singapurskog modela. U Velikoj Britaniji je proveden mješoviti metodološki klaster slučajno-kontroliranog pokusa koji je procjenjivao korištenje udžbenika i pristupa u matematici temeljenim na udžbenicima i pristupima iz Singapura. Glavne značajke pokusa uključivale su korištenje udžbenika *Inspire Maths*, rad u skupinama učenika različitih sposobnosti, korištenje manipulativnih sredstava te naglasak na usvajanje osnovnih koncepata. Pokus je obuhvaćao 12 škola koje su bile nasumično podijeljene u

---

[6] National Center for Education Statistics (NCES). *National Center for Education Statistics.* U.S. Department of Education. Pribavljeno 10. kolovoza 2024., sa https://nces.ed.gov/

eksperimentalnu i kontrolnu skupinu. Eksperimentalna skupina je usvajanje započela s početkom školske godine u rujnu 2015. godine, dok je kontrolna skupina započela četiri mjeseca kasnije. Podaci su se prikupljali u tromjesečjima u jednoj školskoj godini, a obuhvaćali su učeničko znanje i vještine, stavove prema matematici, praksu u učionici, perspektive učitelja te profesionalni razvoj koji je bio specifičan za obje skupine ispitanika. Rezultati su pokazali mali, ali značaj napredak koje su potkrijepili prikupljeni podaci. Pomak je ostvaren u trećem tromjesečju u učeničkom znanju i vještinama, dok se stav prema predmetu nije razlikovao među skupinama. Razlike u praksi u učionici bile su vidljive u prvom tromjesečju, ali kasnije razlika nije bila značajna (Lindorff, Hall, Sammons, 2019).

Jedno od istraživanja koje se bavilo ispitivanjem blagodati same metode modela provedeno je u malezijskoj školi Bukit Bandaraya u Kuala Lumpuru. Namjera istraživača je bila koristiti se metodom modela kao vizualnim prikazom za pretvaranje problemskih zadataka u grafičke prikaze. Takvi bi prikazi učenicima omogućiti da vizualiziraju problem i riješe ga u skladu s potrebama zadatka. Glavni cilj istraživanja bio je riješiti problemske zadatke koji zahtijevaju vještine mišljenja višeg reda (*HOT Higher order thinking skill*) te ispitati učinkovitost metode na 37 učenika četvrtog razreda. Smatrali su da se svi nastavni sadržaji matematike na osnovnoj razini ispituju kroz vještine rješavanja problema odnosno pitanjima koja uključuju vještine mišljenja višeg reda. Eksperimentalno istraživanje se provodilo prije radionice i nakon radionice. Koristili su se testom koji je obuhvaćao 6 pitanja *HOT*-a. Rezultati oba testa su analizirani pomoću SPSS (Statistički paket za društvene znanosti) softvera verzije 22 kako bi se uočile razlike između rezultata oba testa, prosječne promjene i prosječni postotak promjena. Korišten je T-test za analizu podataka. Rezultati su pokazali da postoji razlika u prosječnim srednjim vrijednostima te da je metoda modela učinkovita. Zaključeno je da korištenje metode modela može pospješiti vještine mišljenja višeg reda jer učenicima omogućuje jasnu vizualizaciju zadatka, a to omogućuje pronalaženje točnog rješenja (Ramasamy, Puteh, 2019).

Iako se ne veže uz redovnu nastavu, još je jedno provedeno istraživanje koristilo metodu modela u poučavanju razlomaka i omjera. U tom se istraživanju metoda modela definirala kao pomagalo koje omogućuje učenicima da otkriju matematičku strukturu unutar problema. Istraživanje je obuhvaćalo 5 pitanja, a provedeno je na učenicima osmog razreda koji su se intervjuirali nakon mjesec dana. Uočili su prednost korištenja metode modela te su ju smatrali prikladnom metodom za postavljanje zadataka. Učenici su dali mišljenje da grafičko prikazivanje olakšava praćenje koraka koji se rješava u trenutku. Drugi su naveli da olakšava praćenje jer se podaci ne trebaju mentalno sakupljati, što može biti zbunjujuće, već se mogu grafički prikazati. Učenici na kojima je provedeno istraživanje su se jednoglasno složili da metodu smatraju korisnom (Baker, 2022).

Istraživanje provedeno u Indiji je imalo za cilj ispitati učinkovitost metode modela u unaprjeđenju učenja matematike na osnovnoj razini. Ispitivala se promjena u postignućima učenika u matematici nakon primjene metode u nastavi. Uzorak je obuhvaćao 136 učenika petih razreda koji su bili podijeljeni u dvije skupine po 68 učenika. Jedna skupina koristila je metodu modela, a druga je koristila uobičajene metode učenja cjeline množenja i dijeljenja. U istraživanju se koristio test postignuća iz matematike, a rezultati su se analizirali diferencijalnom analizom. Rezultati su pokazali veliku učinkovitost korištenja metode modela u nastavi, ali prema demografskim karakteristikama se nisu značajno razlikovali u postignućima. Preporuke koje su istaknute nakon provedenog istraživanja su se odnosile na organizaciju programa o osvješćivanju o metodi modela za učitelje matematike, uvođenje metode modela u osnovne i srednje škole, organiziranje obuke o metodi modela za učitelje, revidiranje postojećih udžbenika koji bi uključivali metodu te provođenje dodatnih istraživanja kako bi se metoda prilagodila indijskom obrazovnom sustavu.

U istom je istraživanju navedena srodna studija istraživanja *„A Mixed-method study: Assessing the bar model's impact on preservice teachers' efficacy beliefs"* koje su provele Ann Lyle Rethlefsen i Hyesung Park 2011. godine. Cilj istraživanja bio je utvrditi utječu li specifični nastavni pristupi metode modela na pozitivne promjena u uvjerenjima učitelja o učinkovitosti. Uzorak je obuhvaćao 297 ispitanika, a odgovori su se prikupljali dvama testovima korištenjem instrumenata za procjenu uvjerenja o učinkovitosti poučavanja matematike. U istraživanju su primijenjene mješovite metode koje su obuhvaćale kvalitativne i kvantitativne podatke te terenske aspekte. Rezultati su pokazali pozitivne promjene u stavovima budućih učitelja o vlastitoj učinkovitosti u poučavanju matematike (Thirunavukkarasu, Senthilnathan, 2014).

4. PSIHOFIZIČKA SPREMNOST UČENIKA I PREDUVJETI ZA RAZUMIJEVANJE METODE MODELA

Uvođenje učenika u poučavanje prema singapurskoj metodi zahtjeva prolazak učenika kroz specifične faze učenja, pri čemu je potrebno temeljito pripremiti i motivirati učenike. Ključna načela singapurske metode matematike usmjerena su na dublje razumijevanje matematike, pri čemu se naglašava važnost hijerarhijske prirode tog predmeta. Bez razumijevanja, prethodno stečeno znanje postaje površno i nedovoljno za daljnji napredak. Stoga je od iznimne važnosti da učitelji provjere razinu znanja učenika prije uvođenja novih koncepata i vještina. Učinkovita nastava obuhvaća fazu pripreme, predanosti i ovladavanja. Pripremna faza obuhvaća potrebu da učitelji provjere posjeduju li učenici potrebne vještine za određenu temu, motiviraju ih i osiguraju okruženje za učenje u kojemu se promiče poštovanje i emocionalna sigurnost. U fazi predanosti učenici uče putem konkretnih aktivnosti što omogućuje razumijevanje matematičkih koncepata. Učitelji potiču učenike da istražuju i pronalaze inovativne odgovore, razvijajući njihovu sposobnost postavljanja pitanja, a ne nudeći im gotova rješenja. Oni ujedno postavljaju jasne ciljeve i očekivanja, pomažući učenicima da se usmjere na ciljeve. U fazi ovladavanja učenici imaju odgovornost vježbati kako bi usvojili koncepte, koristeći ponavljanja i varijacije[7].

Singapurska metoda modela razvijena je na temelju suvremenih teorijskih pristupa različitih psihologa koji su uvažavali razvojne potrebe djeteta. Prepoznali su važnost poticanja apstraktnog mišljenja uz primjenu KSA pristupa u kojemu značajnu ulogu ima socijalno okruženje i zrelost djeteta. Naglašava se važnost spiralnog učenja, polazeći od konkretnog iskustva, preko vizualizacije i simbola do apstrakcije. Nužno je proći kroz sve faze koje vode do apstraktnog mišljenja koje je osnova za matematičko razmišljanje.

[7] Smartick. *Teaching Principles of Singapore Math*. Smartick Blog. Pribavljeno 10. kolovoza 2024., sa https://www.smartick.com/blog/parents-and-teachers/education/teaching-principles-singapore-math/

Piagetova teorija kognitivnog razvoja

U dobi između šeste i sedme godine djeca ulaze u ključnu fazu matematičkog razvoja, prelaska s neformalnog na formalno učenje matematike. Pristup „konkretno-slikovito-apstraktno“, koji se koristi u singapurskoj metodi, poznat je po svom uspjeh u promicanju matematičkog razumijevanja i razvoju vještina za rješavanje problema. Kako bi se utvrdilo jesu li učenici spremni za ovaj pristup, potrebno je analizirati njihove kognitivne procese. Polaskom u školu, djeca ulaze u fazu konkretnih operacija, koja traje do otprilike jedanaeste ili dvanaeste godine života. To razdoblje karakterizira logičko rješavanje problema putem mentalnih operacija, pri čemu logičko zaključivanje postaje sveobuhvatnije. U tom razdoblju dolazi do sve veće organizacije i integracije tjelesnih i mentalnih funkcija. Operacija, kao najviši oblik kognitivne aktivnosti, postaje stvarna tek kada se integrira u sustav drugih operacija. Sistematičnost i povezanost operacija ključni su za napredak dječjeg mišljenja i sposobnosti rješavanja problema, čime se omogućava prelazak na složenije i apstraktnije razine mišljenja. Također se razvijaju kognitivne sposobnosti poput decentriranja i reverzibilnosti što se definira kao sposobnost mentalnog okretanja operacija, kao kod primjerice zbrajanja i oduzimanja. Razdoblje konkretnih operacija obilježeno je napretkom u logičkim i aritmetičkim operacijama, uključujući konzervaciju, klasifikaciju, serijaciju te razumijevanje brojevnih sustava. Konzervacija se odnosi na sposobnost djece da shvate da količine ostaju iste unatoč promjeni izgleda, dok klasifikacija definira grupiranje objekata prema zajedničkim karakteristikama, što olakšava razumijevanje skupova i kategorija. Serijacija se odnosi na sposobnost redanja objekata prema određenom pravilu što je bitno za razumijevanje brojčanih nizova i uspoređivanje. Djeca razvijaju sve veću sposobnost mentalne manipulacije objektima i razumijevanje prostornih odnosa što je ključno za razumijevanje geometrijskih koncepata i rješavanje problema vezanih uz prostor i mjerenje. Također, faza konkretnih operacija omogućava vizualizaciju i rad s objektima u prostoru (EduKate Singapore, 2023). Korištenjem „konkretno-slikovito-apstraktno“ pristupa, učenici postepeno prelaze s konkretnog na apstraktno razumijevanje, što je iznimno prikladno za njihove kognitivne procese i razvojne potrebe. Konkretna faza pristupa, koja uključuje manipuliranje fizičkim objektima, odgovara kognitivnim sposobnostima učenika u fazi konkretnih operacija. Kroz interakciju s konkretnim materijalima učenici razvijaju taktilno razumijevanje matematičkih odnosa. Slikovita faza pomaže učenicima da razviju mentalne slike i strategije rješavanja problema kroz vizualne prikaze, pri čemu se ističe razvoj prostornih vještina. Apstraktna faza nadograđuje se na prve dvije faze, omogućujući učenicima da primjene svoje razumijevanje konkretnog i slikovitog na složenije matematičke zadatke koristeći apstraktne simbole.

Sociokulturalna teorija razvoja Leva Vygotskog

Sociokulturalna teorija Vygotskog ima značajan utjecaj na razumijevanje učenja i razvoja djece unutar singapurske metode. Uz Piageta, dijelio je mišljenje da dijete aktivno traži značenje, ali je svoj naglasak stavio na kognitivne procese i socijalno okruženje djeteta, odnosno interakcije koje dijete sklapa s vršnjacima i odraslim ljudima u okruženju. Smatrao je da je djetetovo okruženje ključno za njegov razvoj, odnosno da informacije koje dijete uči uvelike ovisi o tome nalaze li se unutar djetetove zone proksimalnog razvoja (ZPD). Zona proksimalnog razvoja se odnosi na razliku između onoga što učenik može samostalno usvojiti ili uz pomoć drugih. U kontekstu singapurske metode, naglašavao je da je ključna pomoć pri rješavanju problema, odnosno da je za takvu vrstu poučavanja potrebno uključiti dobro osmišljene suradničke zadatke i aktivnosti. Naglašavao je da je djetetu potrebno pružiti pomoć samo u ključnim trenucima, a smanjiti ju napredovanjem samostalnog učenja. Vygotsky je smatrao da se misao i jezik u početku razvijaju odvojeno te da se s vremenom isprepliću. Kao jedan od najvažnijih trenutaka intelektualnog razvoja djeteta ističe povezivanje govora i praktične aktivnosti u cjelinu, nakon čega se kod djece postepeno javlja unutarnji govor. Prilikom rješavanja problemskih zadataka učenici rasuđuju uz pomoću unutarnjeg govora. Unutarnji govor im omogućuje da organiziraju svoje misli, čime se razvija konceptualno razumijevanje. Konkretni materijali u singapurskoj metodi zamjenjuju unutarnji govor, odnosno pomažu učenicima usmjeriti pažnju na ključne koncepte problema (Clement, 2017).

Brunerova teorija razvoja matematičkog mišljenja

Oslanjajući se na Piageta, Bruner razlikuje tri vrste mentalnog predočavanja odnosno učenja; akcijsko, slikovno i simboličko koji su međusobno oslanjaju jedni na druge. Proučavajući na koje načine djeca razumiju koncepte oslonio se na ideju da se učenje odvija manipulirajući konkretnim predmetima. Na tu se ideju oslanja singapurska metoda poučavanja. Simboličko predočavanje započinje između šeste i sedme godine života kada se učenici počinju koristiti simbolima za učenje i stjecanje iskustva (Dienes, 2007).

Dienesova teorija razvoja matematičkog mišljenja

Dienes je definirao učenje kroz cikluse, odnosno kroz dinamične aktivnosti koje se kreću od konkretnih do simboličkih. Učenje započinje slobodnom igrom u kojoj je važno da učenici usvoje ključne značajke materije. Nakon što je dječje iskustvo usvojeno i strukturirano, prelazi se na fazu povezivanja i odnosa koji su učeniku predstavljeni u što više različitih oblika. To omogućuje da se usvoje koncepti te se primjene s nekim novima. Time se dolazi do apstrahiranja (Dienes, 2007.)

5. PRIJEDLOG SUSTAVNOG KORIŠTENJA METODE MODELA U REDOVNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Kao prijedlog uvođenja singapurske metode u razrednu nastavu potrebno ju je uvesti od samog početka obrazovanja te sustavno koristiti. Drugim riječima treba pratiti „spiralni" sustav kurikula kroz model konkretno-slikovito-apstraktno koji se gledajući na postupno usvajanje matematike može povezati s IGSZ shemom. IGSZ shema opisuje proces učenja matematike i razvijanja apstraktnog mišljenja kroz četiri faze: iskustvo, govor, slika i znakovi. U fazi iskustva, učenici koriste fizičke predmete i pritom se oslanjaju na već stečeno znanje kako bi im ono pomoglo u savladavanju novih pojmova. Primjerice, u oduzimanju, učenici mogu izdvojiti 4 bojice iz pernice koja ukupno sadrži 10 bojica. U sljedećoj fazi govora, učenici verbaliziraju ono što rade: „Imam pernicu u kojoj se nalazi 10 bojica. Iz nje sam uzeo 4 bojice, a u pernici je ostalo 6 bojica." Zatim prelaze na slikovni prikaz odnosno crtaju ono što su fizički odvojili. Na kraju učenici prelaze na apstraktni prikaz pomoću brojeva (10- 4 = 6) (Liebeck, 1995). Svaka faza KSA pristupa se može uskladiti s IGSZ shemom. Konkretna faza KSA pristupa odgovara fazi izvođenja u IGSZ shemi, pri čemu je u ovoj fazi najviše prisutan govor. Slikovna faza i apstraktna faza su iste u oba pristupa. Iako je govor najizraženiji u prvoj fazi, on se koristi u svim fazama učenja.

5.1. Primjena metode modela u prvom razredu osnovne škole

TRAJANJE: 46-48 sati / 140 sati godišnje

U prvom razredu osnovne škole metoda modela se najviše može povezati uz domenu brojevi i domenu mjerenje. Moguće ju je implementirati tijekom poučavanja skupova, uspoređivanja brojeva, osnovnih računskih operacija i odnosa među brojevima te rješavanja jednostavnih i kompleksnih zadataka riječima. Prilagodba metode modela individualnim potrebama svakog učenika može varirati u brzini uvođenja novih elemenata. Stoga je preporuka da nastavni proces započne konkretnom fazom KSA pristupa pri čemu bi se najviše koristili fizički objekti, zatim kombinacija fizičkih objekata i grafičkih prikaza, a naposljetku samo grafičko-aritmetičkih prikaza.

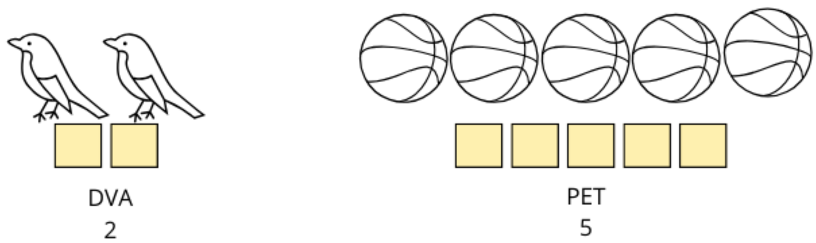
1. Uvod u metodu modela kroz skupove i prirodne brojeve

Cilj: upoznati učenike s metodom modela upotrebljavajući konkretne predmete i jednostavne grafičke prikaze (pravokutnike). Prikazati skupove i prirodne brojeve pomoću pravokutnika.

Trajanje: 8-10 školska sata (brojevi do 5, brojevi do 10, brojevi do 20)

Uvođenjem prirodnih brojeva učenici se prvi put susreću s elementima metode modela. Prva količina koja se uvodi i prepoznaje kao skup s najmanje mogućim brojem objekata koji su sadržani u tom skupu se naziva jedan (oznakom 1). Povećavanjem skupova za najmanju moguću količinu objekata dobiva se dvočlani skup koji se naziva dva i bilježi se oznakom 2. Povećavanjem skupova dolazimo i do broja pet (oznaka 5).

U početnoj fazi poučavanja, kako bi se učenicima olakšalo razumijevanje koncepata brojeva i količina, koriste se fizički objekti kao konkretan prikaz količina. Nakon što učenici usvoje temeljno znanje o količinama korištenjem konkretnih materijala, uvode se grafički modeli (pravokutnici) skupova. Takvi grafički modeli mogu pomoći učenicima u postupnom prijelazu iz konkretne faze u slikovitu fazu KSA pristupa, a ujedno i u apstraktnije razumijevanje matematičkih pojmova.

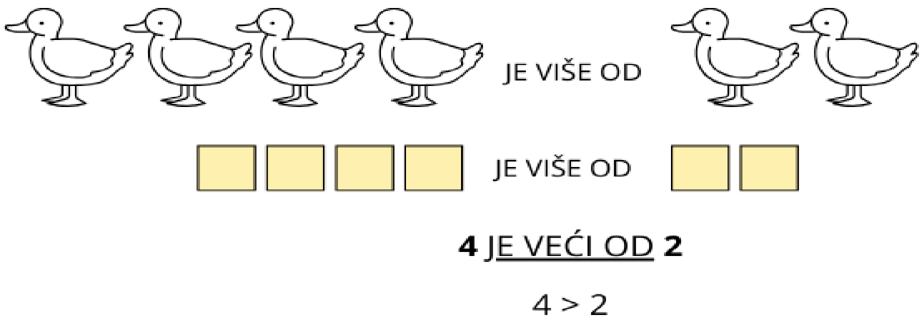


2. Uspoređivanje brojeva

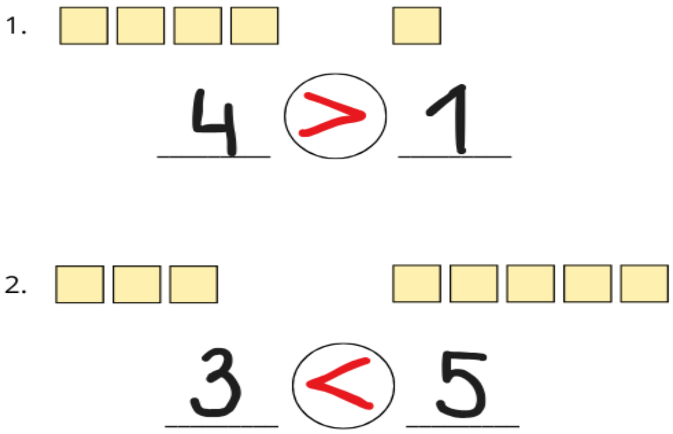
Cilj: razvijati sposobnosti uspoređivanja brojeva koristeći fizičke objekte i grafičke prikaze te razumjeti količine.

Trajanje: 6 školskih sati (uspoređivanje do 5, uspoređivanje do 10, uspoređivanje do 20)

Metoda modela je primjenjiva pri uspoređivanju brojeva (prvobitno do 5). Uz fizičke objekte, moguće je prikazivati usporedbu pravokutnicima. U tom dijelu jasne su naznake metode usporedbe koja koristi grafičke prikaze kako bi učenici intuitivno razumjeli pojmove „više i manje“ kroz konkretne primjere.

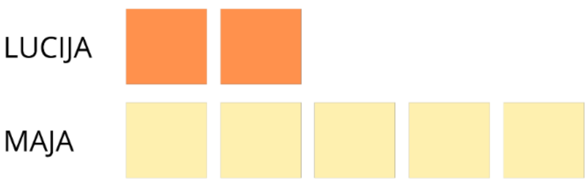


Primjeri zadataka u kojima se prelazi s fizičkih objekata na grafičke modele. Takvi se prikazi mogu pronaći u udžbenicima matematike[8].



Primjer metode usporedbe primjenjive na ovoj razini znanja.

Zadatak: *Lucija ima 2 godine, a njezina sestra Maja 5 godina. Koja sestra ima više godina?*



[8] Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2023). *Super matematika za prave tragače.* Radni udžbenik za 1. razred osnovne škole. 1. dio. Profil Klett.

Maja ima više godina.

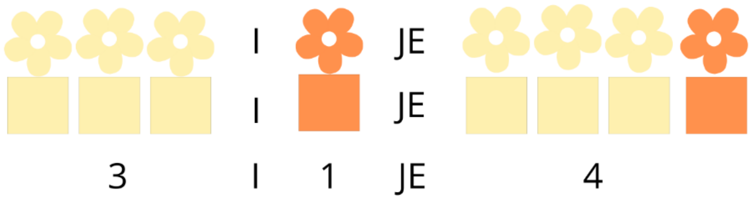
Crtanjem 2 pravokutnika (Lucijine godine) i 5 pravokutnika (Majine godine) učenici mogu vizualizirati razliku među količinama, odnosno da je jedan skup pravokutnika duži od drugog.

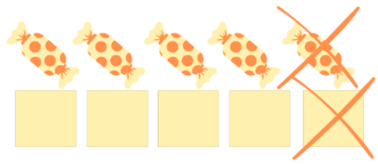
3. Dodavanje i oduzimanje broja 1

Cilj: vizualizirati procese dodavanja i oduzimanja broja jedan, odnosno povećavati i smanjiti skup za 1.

Trajanje: 2 školska sata

Metoda modela je primjenjiva u dodavanja i oduzimanja broja jedan što prethodi zbrajanju i oduzimanju do pet. Kada je riječ o dodavanju broja 1, mogu se crtati pravokutnici u nizu koji predstavljaju početni broj, a zatim dodati jedan pravokutnik koji prikazuje povećanje za 1. Taj pristup može pomoći učenicima da shvate pojam dodavanja odnosno proširenje skupa za 1. U oduzimanju broja 1, početni prikaz može biti jednak. Križanjem jednog pravokutnika prikazuje se smanjenje skupa za 1.





5 MANJE 1 JE 4

3 I 1 JE 4.

Metoda je primjenjiva u jednostavnim zadacima u kojima se kombinira dodavanje i oduzimanje broja 1.

4. **Zbrajanje i oduzimanje do 10 (do kraja školske godine do 20)**

Cilj: primijeniti metodu modela u računskim operacijama zbrajanja i oduzimanja. Omogućiti razumijevanje metode dio-cjelina potičući razlikovanje dijelova i cjeline unutar računskih operacija.

Trajanje: 20 sati

Nakon osnovnog uvođenja skupova, brojeva, uspoređivanja brojeva te dodavanja i oduzimanja broja 1, slijedi zbrajanje i oduzimanje. Metoda je primjenjiva na svakoj razini zbrajanja i oduzimanja.

Načelo komutativnosti moguće je prikazati crtanjem pravokutnika, a učenici mogu uočiti da zbroj ostaje jednak, odnosno da redoslijed pravokutnika ne mijenja rezultat. Vrlo je važno da učenici jasno razumiju što su pribrojnici, a što je zbroj.

U računskoj operaciji oduzimanja umanjenika je moguće prikazati pomoću ukupnog broja pravokutnika. Umanjitelja predstavlja broj prekriženih pravokutnika, a razliku ostatak.

9 - 6 = 3

9 - 3 = 6

U vezi zbrajanja i oduzimanja može se jasno vizualizirati da ako od zbroja oduzmemo jedan pribrojnik, dobit ćemo drugi, odnosno da zbrajanjem razlike i umanjitelja ćemo dobiti umanjenika.

5. Rješavanje jednostavnih i kompleksnijih zadataka riječima

Cilj: primijeniti metode modela u rješavanju jednostavnih i kompleksnih zadataka riječima, uspješno zapisivati podatke iz teksta grafičkim prikazima.

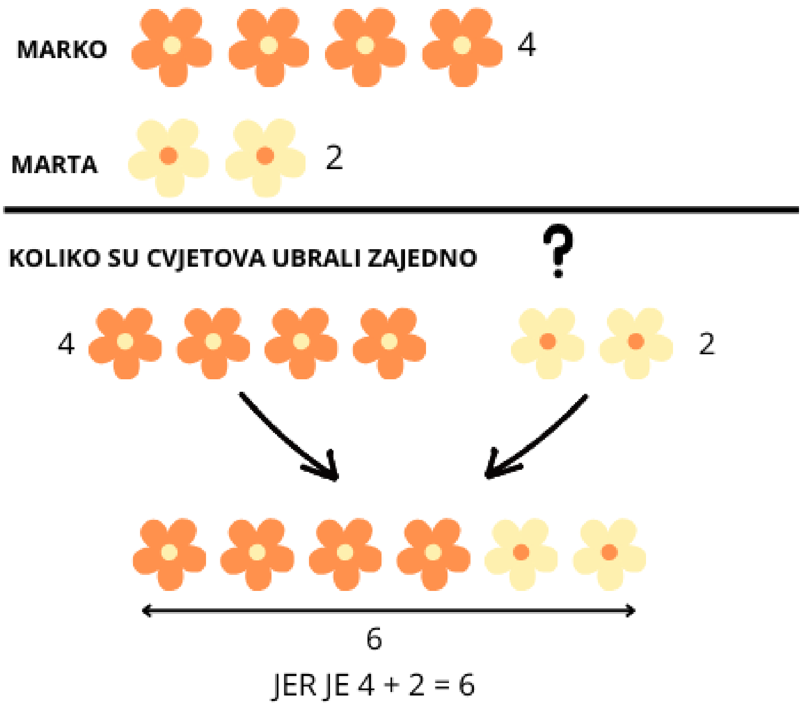
Trajanje: 10 sati

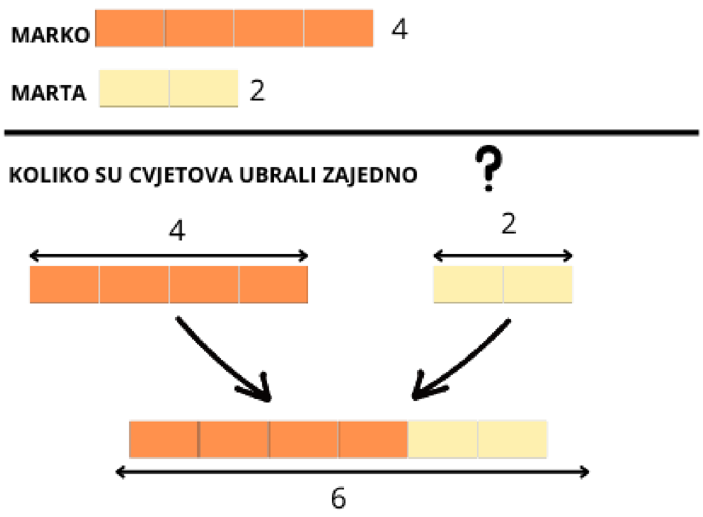
Metoda modela može pružiti vizualni način rješavanja jednostavnih problemskih zadataka s kojima se učenici suočavaju već u prvom razredu. Iako su aritmetički računi vrlo jednostavno rješenje za osnovne zadatke, grafički prikazi omogućuju vizualno rješavanje zadataka jer apstraktno razmišljanje još uvijek nije razvijeno. Umjesto izravnog zapisa računa odnosno ispisivanja količina iz zadatka i njihovog zbrajanja odnosno oduzimanja, metoda omogućuje prikazivanje količina crtanjem pravokutnika što olakšava shvaćanje odnosa među brojevima.

Zadatak: *Marko je ubrao 4 cvijeta, a Marta 2 cvijeta. Koliko su cvjetova ubrali zajedno?*

Ovo je primjer zadatka u kojemu učenici mogu primijeniti računsku operaciju zbrajanja, no da bi se metoda modela usvojila važno ju je uvoditi od najjednostavnijih zadataka koji nadalje sežu do kompleksnijih. Prilikom uvođenja zadataka riječima učenici ih mogu prikazivati uz pomoć konkreta, zatim paralelno konkretima i grafičkim prikazom pravokutnika, pa sve do korištenja metode modela u potpunosti.

Prvi korak u rješavanju zadatka je iščitavanje bitnih podataka. Zatim prikazivanje istih pravokutnicima te rješavanje zadatka. Važno je prepoznati podatke koji su zadani te one koji se traže.



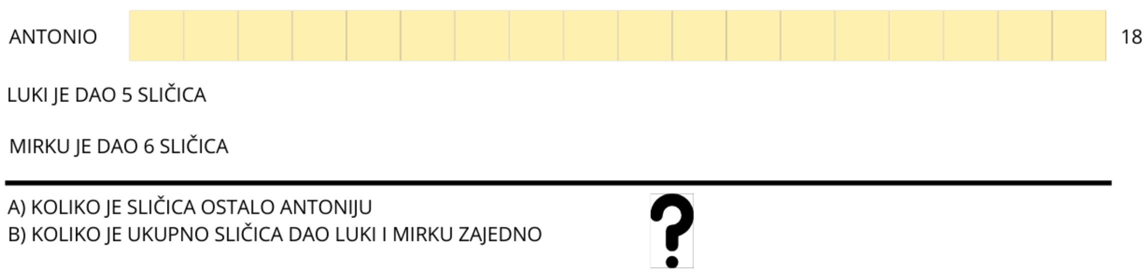


Zajedno su ubrali 6 cvjetova.

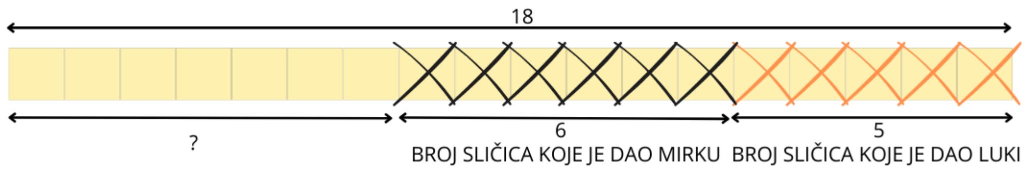
U zadatku je poznato da je Marko ubrao 4 cvijeta (narančaste boje) i da je Marta ubrala 2 cvijeta (žute boje). Svaka skupina cvjetova predstavlja jedan dio, što ukupno čini dva dijela. Zbrajanjem dobivaju cjelinu koju čine 6 cvjetova, od kojih su dva žute boje, a četiri narančaste boje. Drugi prikaz je jednak prvom, ali u grafičkom prikazu pravokutnicima.

Pomoću metode modela se mogu rješavati i kompleksniji zadaci koji uključuju više od jedne računske operacije.

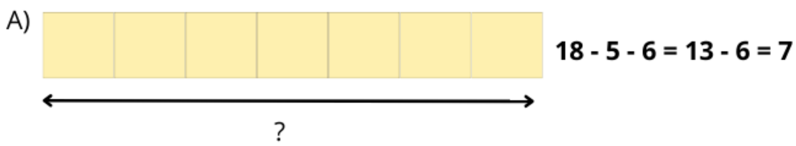
Zadatak: *Antonio ima 18 sličica. Luki je dao 5 sličica, a Mirku 6 sličica. Koliko mu je sličica ostalo, a koliko je ukupno sličica dao Luki i Mirku zajedno?*



Prvi korak rješavanja zadatka se odnosi na zapisivanje poznatih i nepoznatih podataka iz teksta. Zadatak uključuje dva koraka koja se odnose na dva postavljena pitanja. Žuti pravokutnici (18) predstavljaju broj Antonijevih sličica prije podjele s prijateljima.

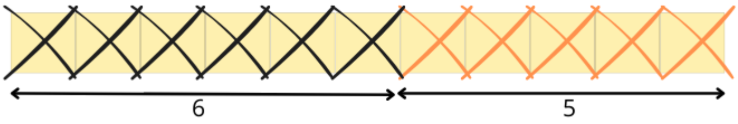


Na ukupnom broju pravokutnika označava se broj sličica (5) koje je dao Luki (pravokutnici prekriženi narančastom oznakom), a zatim i broj sličica (6) koje je dao Mirku (pravokutnici prekriženi crnom bojom). Preostali pravokutnici prikazuju sličice koje su ostale Antoniju nakon što je dio dao Mirku i Luki.



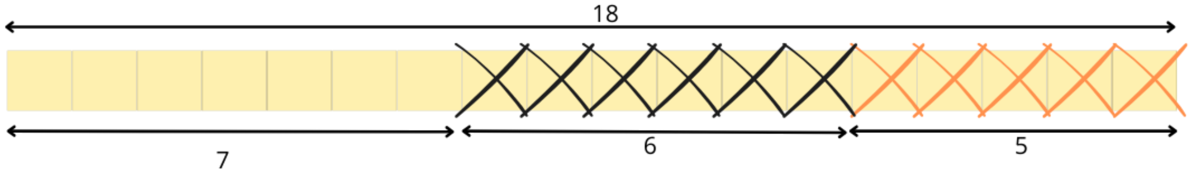
Do rješenja se dolazi oduzimanjem broja sličica koje je dao Luki i Mirku od ukupnog broja sličica (18-5-6= 7).

Da bi se pronašao ukupan broj Lukinih i Mirkovih sličica mogu se zbrojiti pravokutnici koji su prekriženi. Drugi način rješavanja drugog djela zadatka je da se od ukupnog broja Antonijevih sličica oduzme broj njegovih sličica nakon podjele.

B) 

6 + 5 = 11

ILI

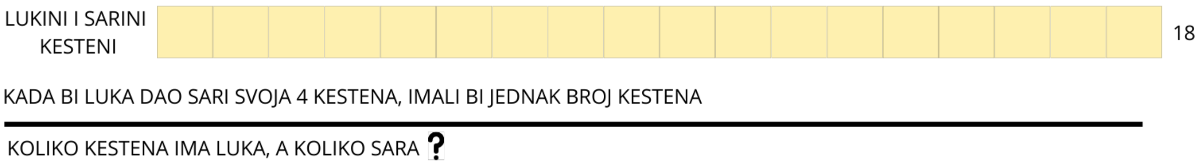


18 - 7 = 11

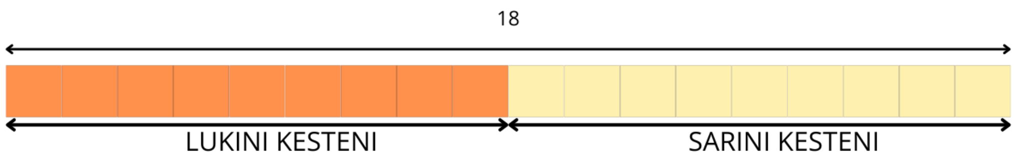
Antoniju je ostalo 7 sličica.

Luki i Mirku je ukupno dao 11 sličica.

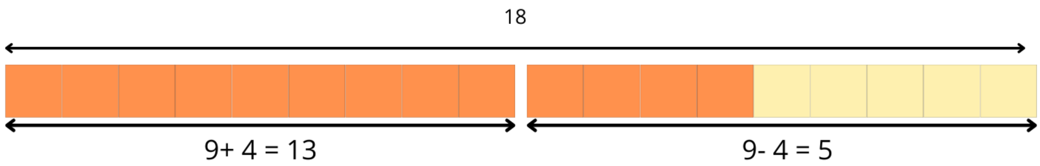
Zadatak: *Sara i Luka su ukupno sakupili 18 kestena. Kada bi Luka dao Sari svoja 4 kestena, imali bi jednak broj kestena. Koliko kestena ima Luka, a koliko Sara?*



Iz zadatka je poznato da Luka i Sara zajedno imaju 18 kestena te da bi imali jednak broj kestena ako bi Luka dao svoja 4 kestena Sari. U zadatku se traži količina Lukinih kestena i količina Sarinih kestena. Grafičko-aritmetičkom metodom se zadatak može vrlo jasno prikazati. Žuti pravokutnici predstavljaju ukupan broj kestena (18).



Ako bi se količina zajedničkih kestena podijelila točno na pola, dobila bi se količina kestena koje bi Sara i Luka imali nakon što Luka svoja 4 kestena da Sari. Iako učenici u prvom razredu ne uče računsku operaciju dijeljenja, vrlo lako mogu odrediti sredinu i doći do zaključka da je polovica broja 18 broj 9.



Ako Luka i Sara imaju jednak broj kestena, znači da Sara ima 4 Lukina kestena (4 narančastih pravokutnika u Sarinom dijelu). Kada bi Sara vratila Luki 4 posuđena kestena, Luka bi imao 13 kestena, a Sara samo 5. Dakle, kada bi Luka dao svoja 4 kestena Sari onda bi imali podjednako. Ako Luka ima 13 kestena i 4 da Sari, ostaje mu 9 kestena. Ako Sara ima 5 kestena i dobije 4 kestena od Luke, imala bi 9 kestena .

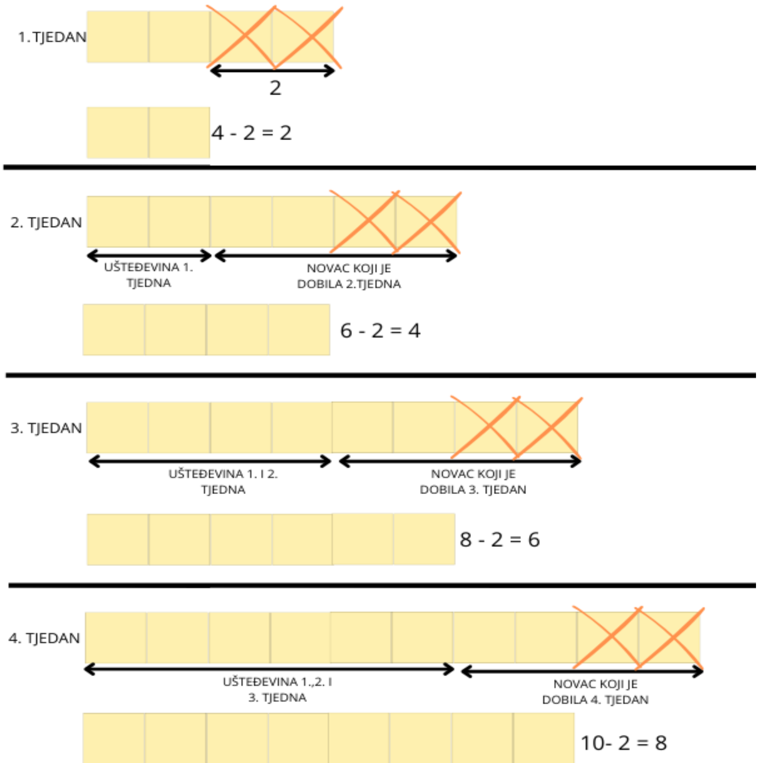
Luka ima 13 kestena, a Sara ima 5 kestena.

Zadatak: *Mila je za rođendan dobila štednu kasicu. Prvi je tjedan u kasicu ubacila 4 eura, ali je u istom tom tjednu potrošila 2 eura. Sljedeći tjedan je ponovno dobila 4 eura, ali je u istom tom tjednu potrošila još 2 eura i tako svaki idući tjedan. Na kraju kojeg tjedna će imati ukupno ušteđeno 8 eura?*

MILA SVAKI TJEDAN DOBIJE 4 EURA, ALI I POTROŠI 2 EURA.

NA KRAJU KOJEG TJEDNA ĆE IMATI UKUPNO UŠTEĐENO 8 EURA?

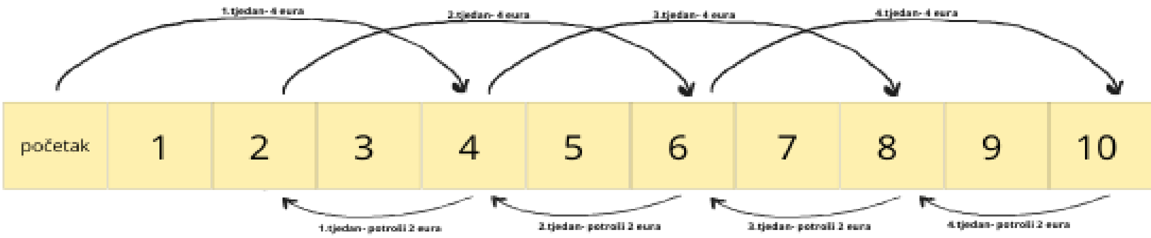
U zadatku je poznato da Mila svaki tjedan dobije 4 eura koje stavi u štednu kasicu, ali isti taj tjedan iz kasice potroši 2 eura. Postavlja se pitanje koliko tjedana Mila mora štedjeti novac kako bi sakupila 8 eura.



Žuti pravokutnici predstavljaju količinu novca koju je Mila uštedjela u prvom tjednu (4 eura), ali je ujedno i 2 eura potrošila (2 prekrižena pravokutnika). U prvom tjednu joj je ostalo 2 eura. Drugi tjedan je dobila 4 eura i sveukupno ima 6 eura (2 eura uštеđena iz prvog tjedna i 4 eura koje je dobila u drugom tjednu). U istom tjednu potrošila još 2 eura (2 prekrižena pravokutnika). Na kraju drugog tjedna je uštedjela ukupno 4 eura. Treći tjedan je započela s 4 eura u štednoj kasici i dobila još 4 eura te sveukupno ima 8 eura (4 eura ušteđena iz prvog i drugog tjedna i 4 eura koje je dobila u trećem tjednu). U istom tjednu potrošila još 2 eura (2 prekrižena pravokutnika). U ovom koraku učenici trebaju biti pažljivi jer dobivanjem novca u trećem tjednu Mila ima ukupno 8 eura. Važno je primijetiti da je isti taj tjedan potrošila 2 eura. U pitanju glasi na kraju kojeg će tjedna imati ušteđeno 8 eura. Na kraju trećeg tjedna je uštedjela samo 6 eura. U četvrtom tjednu je Mila imala ušteđeno 6 eura te je dobila još 4 eura te sveukupno ima 10 eura (6 eura koje je uštedjela u prvom, drugom i trećem tjednu i 4 eura koje je dobila u četvrtom tjednu). U istom tom tjednu je potrošila 2 eura (dva prekrižena pravokutnika).

Na kraju četvrtog tjedna Mila je imala ušteđeno 8 eura.

Drugačiji prikaz rješavanja zadatka koji ne prati u potpunosti rješavanje po metodi modela, a može biti vizualno koristan.



5.2.Primjena metode modela u drugom razredu osnovne škole

TRAJANJE: 33 sati / 140 sati godišnje

U primjeni metode modela u drugom razredu osnovne škole naglasak se stavlja na proširivanju i produbljivanju gradiva te razumijevanju matematičkih koncepata. Dok se u prvom razredu učenici upoznaju s brojevima i osnovnim računskim operacijama zbrajanja i oduzimanja do 20, u drugom se razredu gradivo proširuje na brojeve do 100 te se usvajaju računske operacije množenja i dijeljenja. To zahtjeva prilagodbu pristupa učenju, posebice u korištenju grafičko- aritmetičkog modela. Jedna od ključnih promjena koja bi trebala uslijediti je prijelaz s konkretne faze u slikovitu fazu KSA pristupa u potpunosti. Iako se preporučuje da se na početku ponove elementi prethodne faze kako bi se osiguralo temeljito razumijevanje, važno je da učenici započnu koristiti prikaze koji su složeniji. Umjesto crtanja mnogobrojnih pravokutnika koji su jasno prikazivali male brojeve (do 20), učenici bi trebali početi crtati duže pravokutnike koji mogu lakše predstaviti skupine većih brojeva (brojevi do 100) i olakšati vizualizaciju. Takva prilagodba je ključna jer s prelaskom na brojeve do 100, učenici će se suočiti s kompleksnijim zadacima koji će zahtijevati jasne vizualne prikaze.

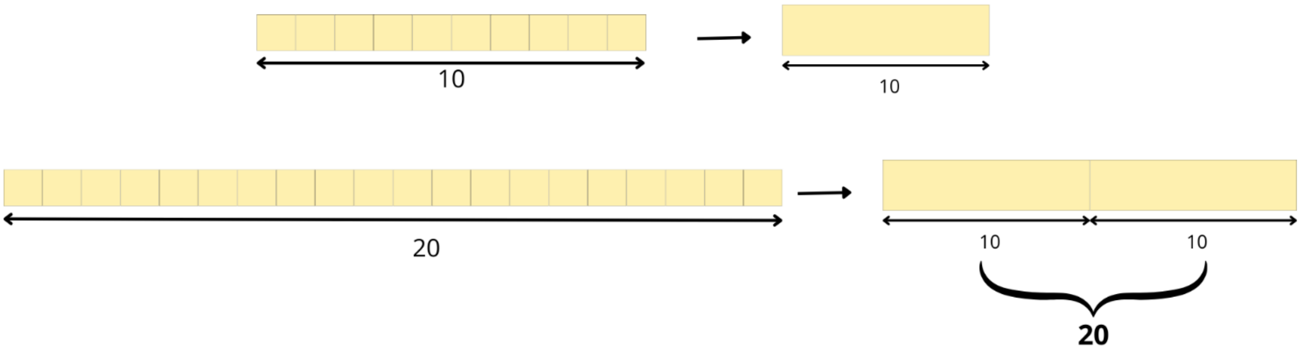
1. Brojevi do 20

Cilj: ponoviti gradivo prvog razreda uz primjenu metode modela i uvođenje grafičko-aritmetičkih prikaza većih brojeva koristeći jedan pravokutnik.

Trajanje: 4 sata

Ponavljanjem brojeva do 20, učenici će se prisjetiti zapisivanja uz pomoć konkreta i grafičkih prikaza pravokutnika koje su usvojili u prethodnoj školskoj godini. U ovom dijelu je ključan trenutak tranzicije iz dosadašnjeg prikazivanja brojeva pomoću više manjih pravokutnika, u kojima je svaki od njih predstavljao jednu jedinicu, na složeniji prikaz većih brojeva gdje će se koristiti jednim pravokutnikom za predstavljanje jednake vrijednosti.

Učenici su u prvom razredu broj 10 vizualno prikazivali kao niz od deset pojedinačnih pravokutnika. S obzirom na proširivanje brojevnog sustava, pristup vizualizacije će se promijeniti kako bi učenici lakše označavali velike brojeve. Umjesto prikazivanja broja 10 pomoću deset malih pravokutnika, koristit će se jedan duži pravokutnik koji ima jednaku vrijednost.



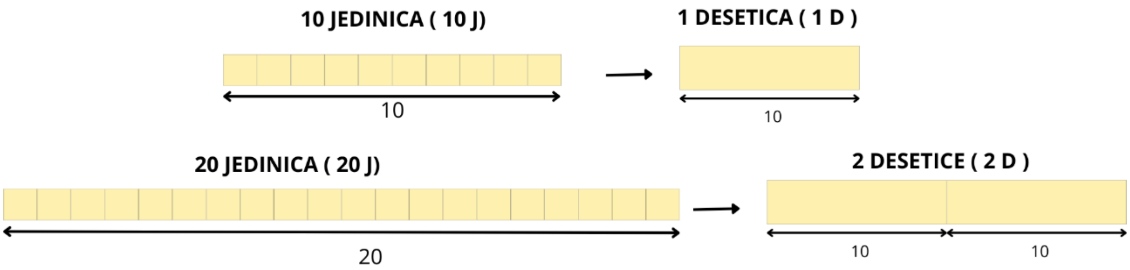
U drugom razredu se učenici susreću s sličnim prikazom odnosno često koriste simboličke prikaze „novčanica“ jer su već upoznati s konceptom novca što olakšava razumijevanje.

2. Zapisivanje desetica

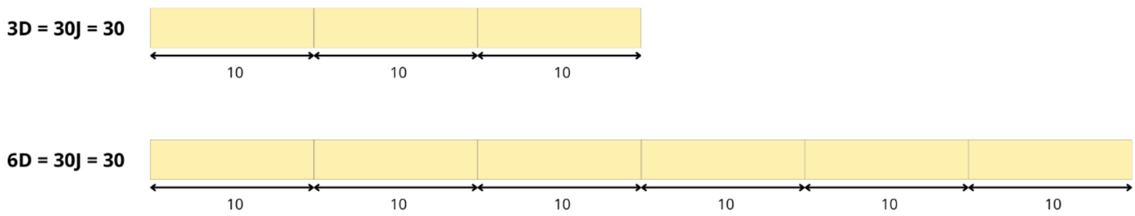
Cilj: zapisivati brojeve koristeći se deseticama i jedinicama. Metodom modela vizualizirat će desetice i jedinice pravokutnicima.

Trajanje: 3 sata

Prikazivanje desetica (i jedinica) pravokutnicima učinit će da učenicima približimo naš dekadski sustav i njegovu logiku. Ovladavanjem konceptima desetica i jedinica stvaraju se pretpostavke za bolje razumijevanje većih brojeva, uspoređivanja i računanja njima.



Dulji pravokutnici metode modela mogu pomoći učenicima da vizualiziraju desetice kao veće cjeline.



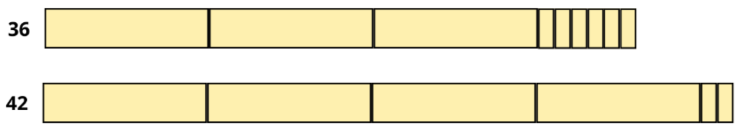
Može se postaviti pitanje treba li se prikaz desetica vezati uz metodu modela jer je cilj doći što brže do razumijevanja općeg pravokutnika koji predstavlja broj. Takva vrsta povezivanja može biti korak u uspostavljanju temelja za razumijevanja općeg pravokutnika koji predstavlja broj.

3. Uspoređivanje brojeva do 100

Cilj: razviti sposobnost uspoređivanja brojeva do 100 grafičkim-aritmetičkim prikazom

Trajanje: 3 sata

Učenici nastavljaju koristiti pravokutnike za prikazivanje tako da kombinacijom većih i manjih pravokutnika predstavljaju desetice i jedinice. Korištenjem metode modela učenici si mogu olakšati vizualizaciju uspoređivanja brojeva. Uspoređivanje se prvenstveno odnosi na uspoređivanje desetica, a zatim na uspoređivanje jedinica.



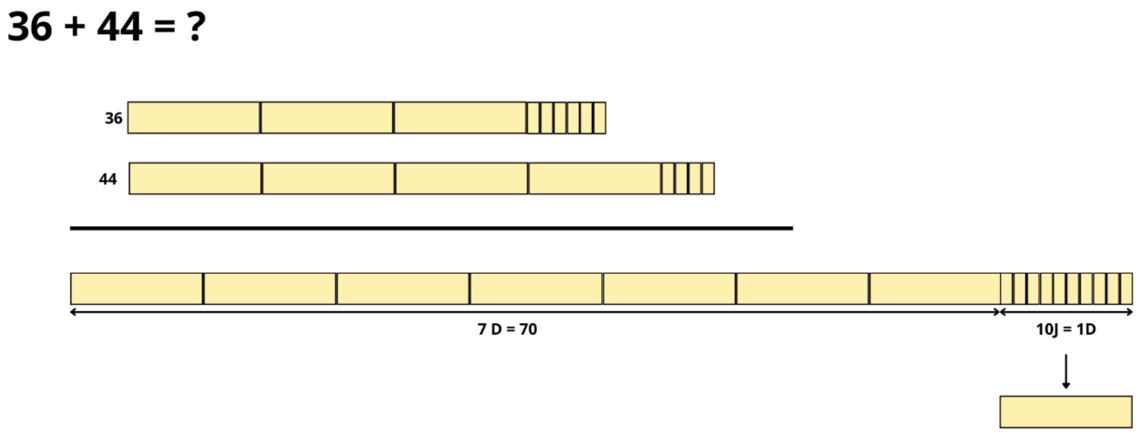
U primjeru uspoređivanja brojeva 36 i 42, učenici jasno mogu uočiti da je 42 veći od 36 jer broj 42 ima jednu deseticu više od broja 36. U broju 36 su prikaza tri velika pravokutnika koja predstavljaju tri desetice (30), a u broju 42 su prikazana 4 velika pravokutnika koja predstavljaju četiri desetice (40).

4. Zbrajanje i oduzimanje do 100

Cilj: usvojiti koncepte računanja grafičko-aritmetičkim prikazima u procesu zbrajanja i oduzimanja do 100.

Trajanje: 10 sati

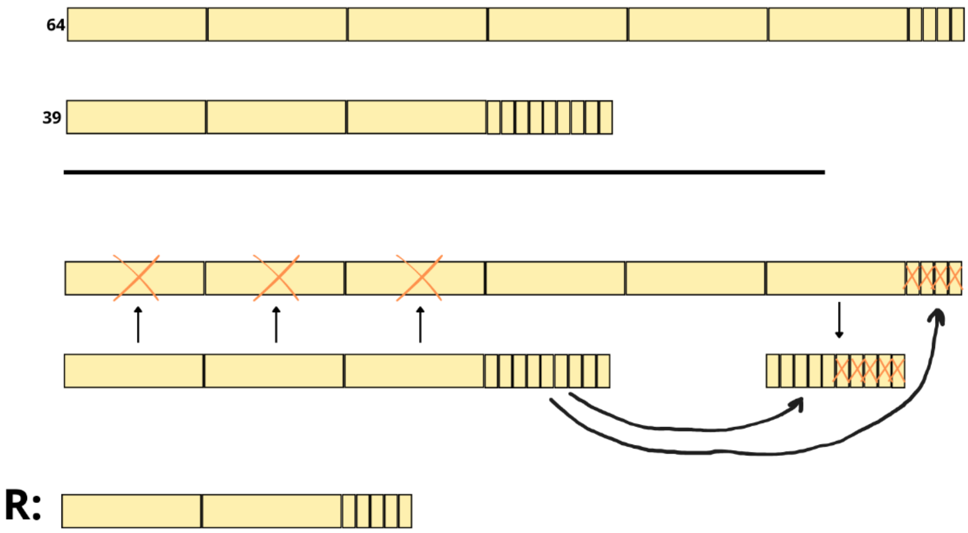
Zbrajanje i oduzimanje brojeva u većem rasponu (do 100) može biti izazovnije za učenike. Primjenom metode modela koja uključuje grafičko prikazivanje pravokutnicima može olakšati razumijevanje procesa računanja.



U procesu zbrajanja brojeva 36 + 44 broj 36 se rastavlja na 3 desetice i 6 jedinica, a broj 44 na 4 desetice i 4 jedinice. Broj 36 pravokutnicima prikazujemo kao 3 velika pravokutnika i 6 malih pravokutnika, dok broj 44 prikazujemo kao 4 velika pravokutnika i 4 mala pravokutnika. Zbrajanjem desetica učenici će moći uočiti da ih je sveukupno 70, dok zbrajanjem jedinica će moći uočiti da ih je sveukupno 10. Nadalje, mogu uočiti da se 10 jedinica može prikazati uz pomoć jedne desetice (10J = 1D). To je grafički prikaz ovakvog načina zbrajanja: 36 + 44 = (30 + 6) + (40 +4) = 30 + 40 + 6 + 4.

Rješenje je 80.

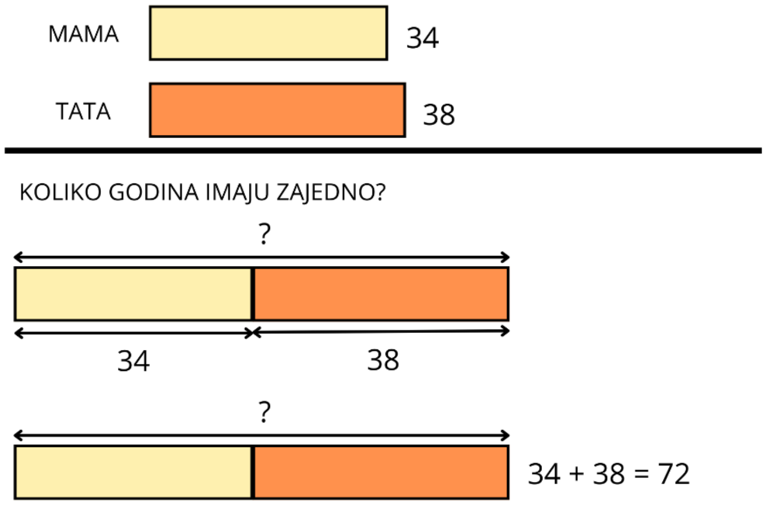
64 - 39 = ?



Broj 64 je prikazan uz pomoć 6 velikih pravokutnika koji predstavljaju 6 desetica i 4 manja pravokutnika koji predstavljaju 4 jedinice. Broj 39 je prikazan uz pomoć 3 velika pravokutnika koji predstavljaju 3 desetice i 9 manjih pravokutnika koji predstavljaju 9 jedinica. Prvi korak je oduzimanje desetica, odnosno od broja 64 oduzeti 3 desetice (toliko desetica sadrži broj 39). Zatim se prelazi na oduzimanje jedinica. U broju 64 se oduzimaju 4 jedinice. Treba se oduzeti još 5 te se stoga jedna od desetica u broju 64 prikazuje kao 10 jedinica (1D = 10J). Iz novonastalog bloka koji prikazuje 10 jedinica oduzima se 5 jedinica (oduzele su se 4, zatim 5 jer broj 39 sadrži 9 jedinica). Preostaju 2 desetice i 5 jedinica, a to je 25.

Nakon što učenici savladaju zbrajanje i oduzimanje brojeva uz pomoć vizualnih prikaza desetica i jedinica, slijedi važan korak u prijelazu prema naprednijem grafičkom prikazivanju. Naime, umjesto prikazivanja brojeva koji predstavljaju desetice i jedinice, učenici prelaze na prikazivanje prirodnih brojeva uz pomoć jednog pravokutnika. Iako je takav prikaz iznimno učinkovit, ujedno može biti zahtjevan i apstraktan za učenike drugog razreda. Prikazivanje brojeva koji su relativno blizu po vrijednosti, poput 42 i 46, može biti zbunjujuće jer su razlike između brojeva male, a one bi grafički trebale biti vidljive (veći i manji pravokutnik). U tom segmentu bi se moglo raspravljati o tome u kojoj mjeri učenici razumiju apstraktnije prikaze s obzirom na dob i kognitivne sposobnosti. Važnije je da zadatak bude jasno postavljen te da učenici razumiju što se od njih traži u zadatku. Cilj je razviti svijest o strukturiranju zadatka, a ne isključivo u crtanju malih razlika među pravokutnicima. Takav način prikazivanja brojeva ima veliku važnost u rješavanju zadataka riječima.

Primjer: *Lukina mama ima 34 godine, a Lukin tata ima 38 godina. Koliko godina Lukini roditelji imaju zajedno?*



5. Množenje i dijeljenje brojeva do 100

Cilj: primijeniti znanje o grafičkom-aritmetičkom prikazivanju u operacijama množenja i dijeljenja

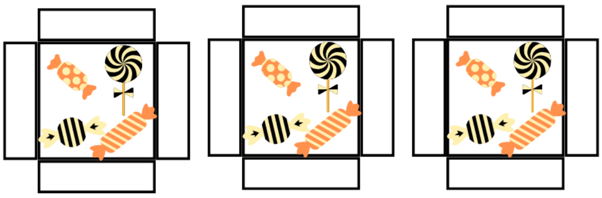
Trajanje: 8 sati

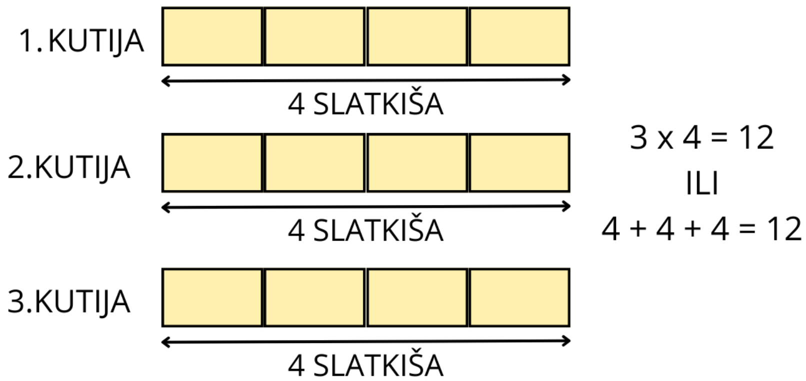
Množenje i dijeljenje brojeva se nadovezuje na stečeno znanje o zbrajanju i oduzimanju. Usvajanjem novih računskih operacija učenici bi se trebali vratiti na konkretnu fazu KSA pristupa koja će im omogućiti vizualnu preglednost, odnosno uvoditi množenje po IGSZ shemi. Također bi se trebalo vratiti na jedinični prikaz blokovima.

Učenici se pri uvođenju množenja mogu koristiti konkretnim objektima kako bi razumjeli proces množenje. U metodi modela se množenje prikazuje kroz pravokutnike jednakih količina koji se ponavljaju onoliko puta koliko je zadano u zadatku.

Primjer: *Pomoćnice Svetog Nikole su slagale jednake poklone za djecu. U jednu kutiju su stavile 4 slatkiša. Koliko su slatkiša stavile u 3 kutije?*

Učenici u razredu mogu slagati slatkiše u kutije. U jednu kutiju mogu staviti 4 slatkiša, pa zatim napuniti još dvije kutije jednakim brojem slatkiša. Nakon dodavanja, učenici će moći prebrojati koliko se slatkiša nalazi u kutijama. Nakon prikazivanja konkretima, i eventualnog prikaza slikama i crtanjem, učenici mogu prijeći na grafičko prikazivanje blokovima.





Primjer započinje konkretnim prikazom kutija u kojima se nalaze slatkiši. Učenici mogu jasno vidjeti kako su slatkiši raspodijeljeni u kutijama i razumjeti princip ponavljanja. Tri kutije sa slatkišima predstavljaju tri skupine u kojima se nalazi po 4 slatkiša. U ovom je primjeru jasno prikazana veza množenja i zbrajanja jer dodavanjem broja slatkiša učenici mogu doći do istog rezultata.

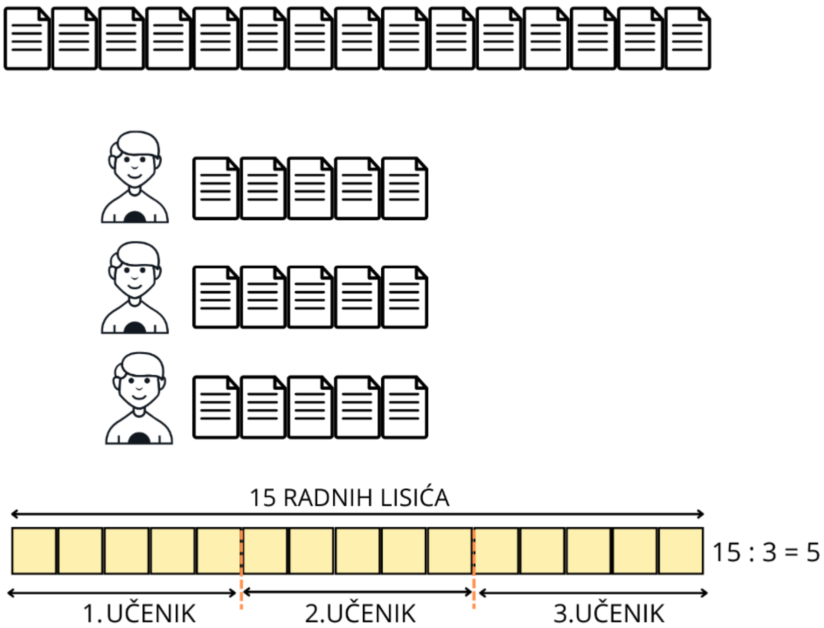
Primjenom grafičke-aritemtičke metode prikazuju se pravokutnicima tri kutije po četiri slatkiša. Množenjem broja kutija s brojem slatkiša u svakoj kutiji učenici dobivaju rješenje. U tom se primjeru može primijeniti i načelo komutativnosti s kojim su učenici već upoznati, odnosno množenjem broja slatkiša s brojem kutija dobit će se jednako rješenje.

Uvođenjem dijeljenja kroz manipulaciju objektima, zatim slikovnim prikazima te grafičkim prikazima je važan dio postupnog usvajanja te računske operacije. Praćenjem KSA pristupa učenici prvo razvijaju konkretno razumijevanje. Prvobitno se učenici mogu služiti stvarnim objektima kako bi vidjeli i osjetili što predstavlja dijeljenje.

Primjer: *Učiteljica ima 15 radnih listića koje treba jednako podijeliti trima učenicima. Koliko će radnih listića dobiti svaki učenik?*

Učiteljica bi mogla dati jednom učeniku 15 listića koje treba jednako podijeliti trima učenicima. Učenik bi tada fizički dijelio listiće na tri jednaka dijela, odnosno odlagao po jedan papir ispred svakog učenika. Nakon što podijeli sve listiće, učenici pred kojima se nalaze isti ih mogu prebrojati.

Nakon što usvoje koncept pomoću fizičkih objekata, mogu prijeći na slikovne i grafičke prikaze u udžbenicima i bilježnicama. Korištenjem pravokutnika učenici bi prikazivali brojeve i dijelili na jednake dijelove.



Prvi prikaz je jednak fizičkom manipuliranju, dok drugi grafički prikaz dijeljenje prikazuje drugačije. 15 pravokutnika predstavljaju ukupan broj nastavnih listića koji se dijele na tri jednaka dijela. U svakom dijelu ostaje 5 radnih listića.

Svaki učenik bi dobio 5 radnih listića.

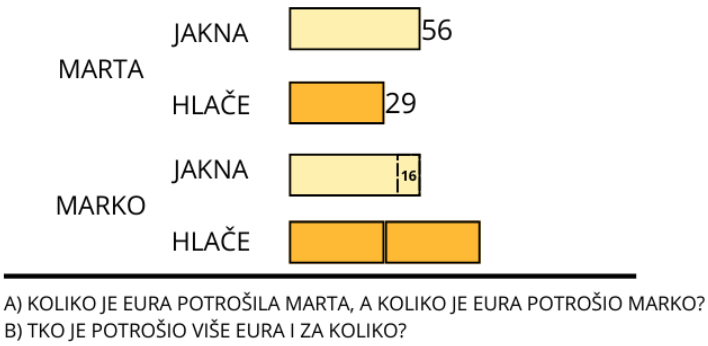
6. Rješavanje jednostavnih i kompleksnijih zadataka riječima

Cilj: razviti vještine rješavanja problemskih zadataka kroz primjenu metode modela. Jasno strukturirati podatke iz teksta.

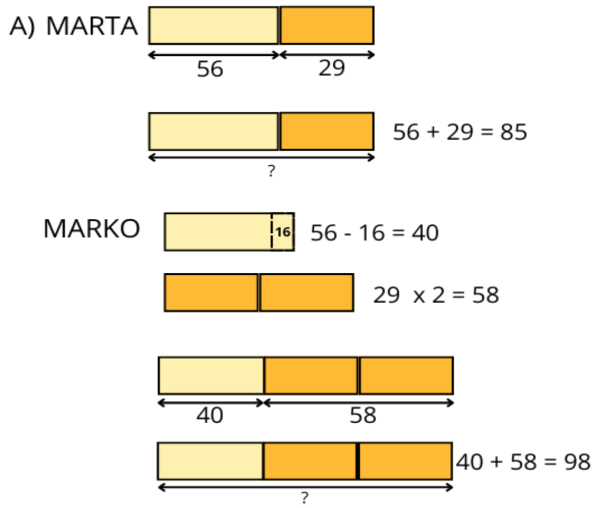
Trajanje: 5 sati

U drugom razredu učenici rješavaju zadatke riječima koji uključuju širi raspon brojeva do 100. Koriste se računskim operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Sukladno povećanju raspona gradiva učenici će se susretati s kompleksnijim zadacima koji mogu zahtijevati rješavanje u više koraka kako bi se došlo do rješenja. Također se mogu susresti sa zadacima koji zahtijevaju kombinaciju više računskih operacija.

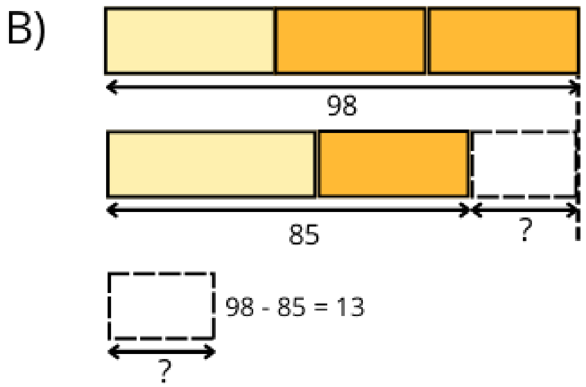
Zadatak: *Marta i Marko se pripremaju za skijanje. Marta je kupila jaknu za 56 eura i hlače za 29 eura. Marko je kupio jaknu koja je bila 16 eura jeftinija od Martine jakne te hlače koje su bile duplo skuplje od njezinih. Koliko je eura potrošila Marta, a koliko Marko? Tko je potrošio više eura i za koliko?*



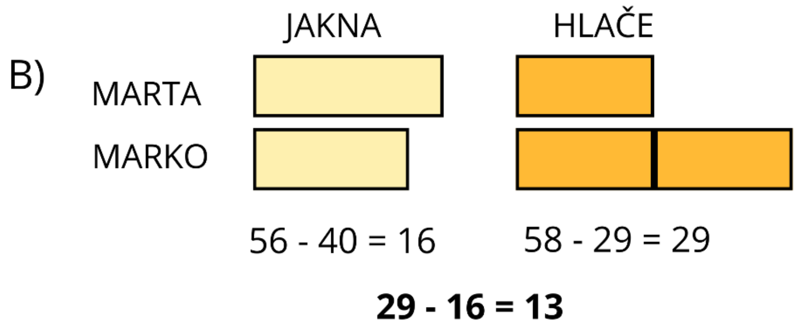
Učenici bi prvo trebali pročitati zadatak i strukturiranjem pravokutnika izdvojiti ključne informacije. Marta je potrošila 56 eura na jaknu što je prikazano žutim pravokutnikom, a za hlače 29 eura koje su prikazane narančastim pravokutnikom. Marko je potrošio 16 eura manje za jaknu te je njegova jakna prikazana kao Martina jakna manje 16 (dio unutar žutog pravokutnika koji je odijeljen). Marko je za hlače potrošio duplo više od Marte te se stoga njegove hlače prikazuju pomoću dva narančasta pravokutnika. U zadatku se traži koliko je svako od njih potrošio, tko je više i za koliko.



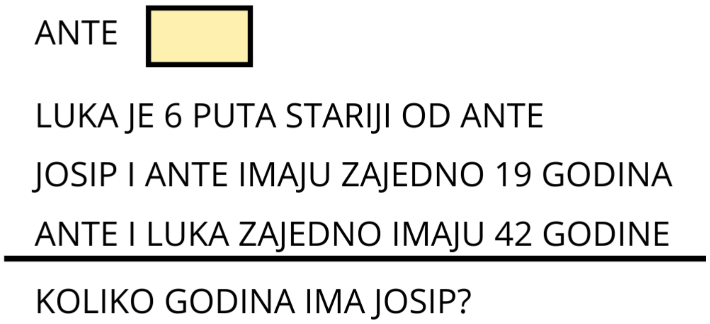
Prislanjanjem žutog pravokutnika (Martina jakna) uz narančasti pravokutnik (Martine hlače) učenici dolaze do Martinog ukupnog troška (56 + 29 = 85). Na isti se način dobije Markov ukupni trošak (40 + 58 = 98).



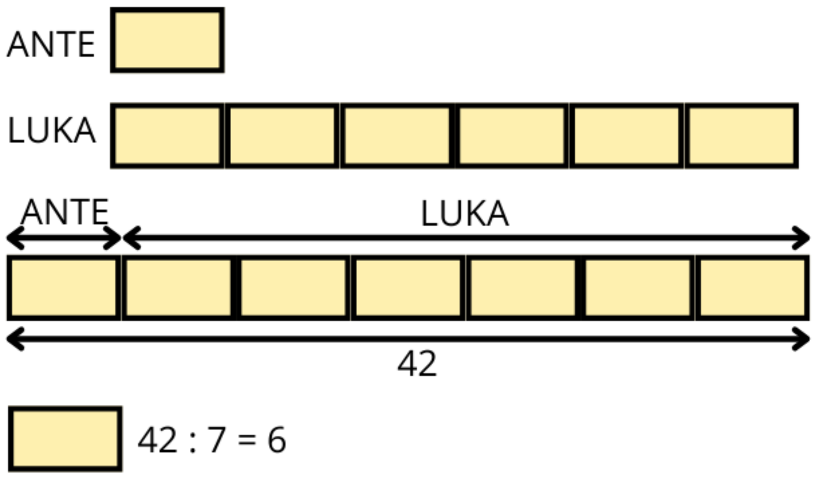
U drugom dijelu zadatka pravokutnicima se uspoređuju Markovi i Martini troškove. Uspoređivanjem izračunatih ukupnih troškova lako se izračuna razlika 13. Također, razliku dobijemo bez računanja ukupnog troška Marka i Marte već uspoređivanjem pojedinačnih troškova odnosno pravokutnika.



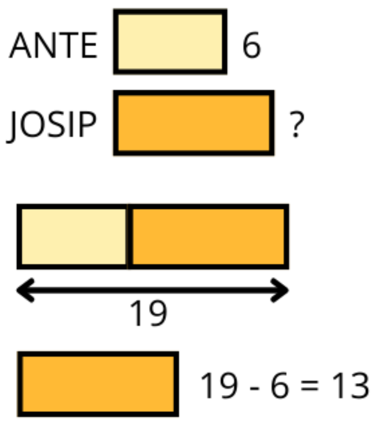
Zadatak: *Ante ima nekoliko godina. Njegov otac Luka je 6 puta stariji od Ante, a Ante i njegov brat Josip zajedno imaju 19 godina. Koliko godina ima Josip ako Ante i otac zajedno imaju 42 godine?*



U zadatku je poznato da je Antin otac stariji od njega 6 puta te da zajedno imaju 42 godine. Nadalje je poznato da Ante i njegov brat Josip imaju zajedno 19 godina. Antine godine su nepoznate te se iz zadatka traži koliko godina ima Josip. Da bi saznali Josipove godine učenici trebaju saznati koliko godina ima Ante.



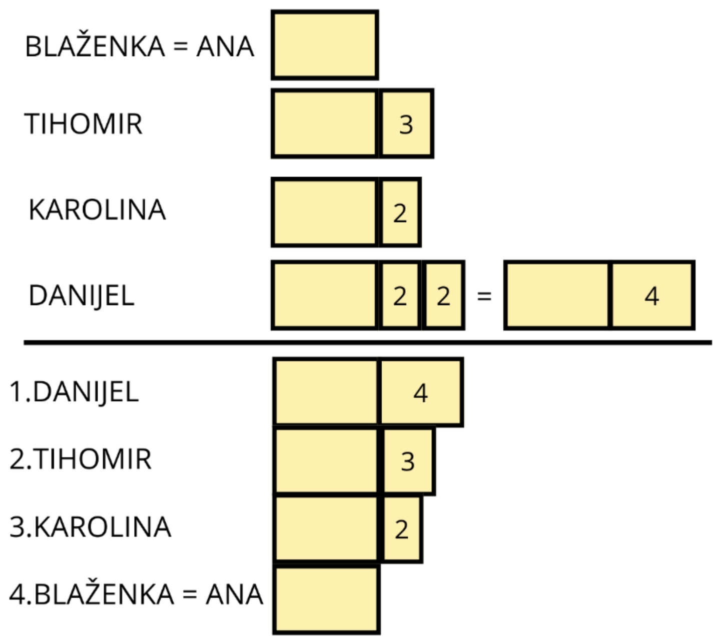
Prvo prikazujemo koliko godina ima Ante (žuti blok) i koliko godina njegov 6 puta stariji otac Luka (šest takvih žutih blokova). Ukupno je 7 žutih pravokutnika koji iznose 42. Dakle, Ante ima 6 godina, a Luka 36.



Ante ima 6 godina, a Josip (narančasti pravokutnik) i on zajedno imaju 19 godina.

Josip ima 13 godina.

Zadatak: *U obitelji je petero djece: Ana, Blaženka, Karolina, Danijel i Tihomir. Karolina je dvije godine starija od Blaženke, ali mlađa dvije godine od Danijela. Tihomir je tri godine stariji od Ane. Blaženka i Ana su blizanke. Tko je od njih najstariji?*[9]

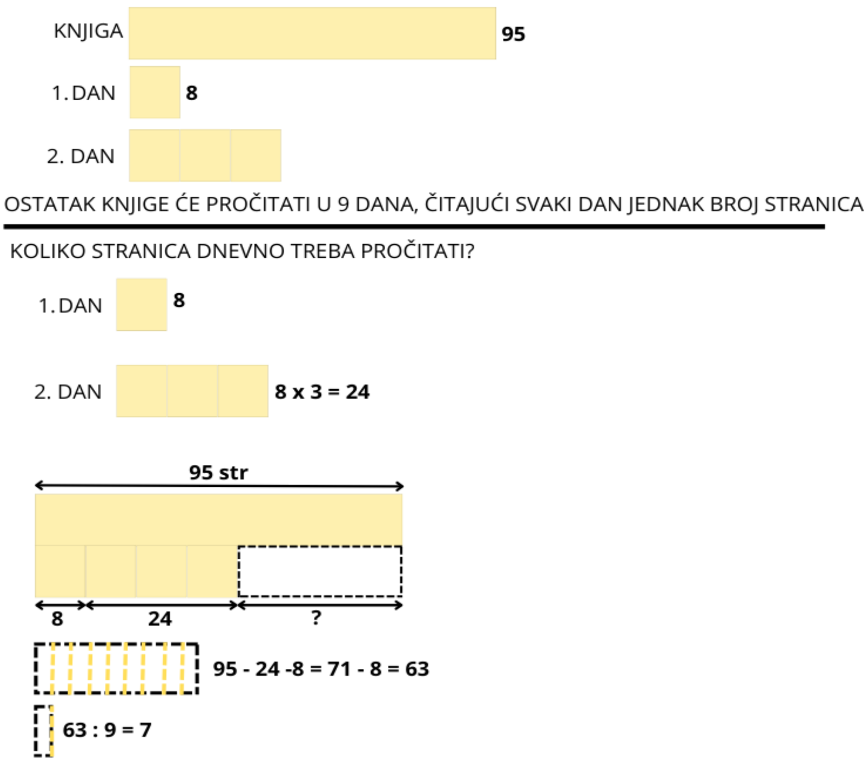


U zadatku je poznato da su Blaženka i Ana jednako stare, a druga braća i sestra su od njih stariji za nekoliko godina. Jedino se Danijel konkretno ne veže uz njihove godine. Blaženka i Ana se mogu predstaviti kao jedan pravokutnik. Karolina je starija od Blaženke (ujedno i Ane) 2 godine te se ona prikazuje kao Blaženka/Ana i još 2 godine.

[9] Klokan bez granica. (2013). Pčelice. 2. razred osnovne škole. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2013/pcelice-2013-zad.pdf

Karolina je ujedno mlađa od Danijela 2 godine, što znači da Danijel ima godina koliko i Karolina te još 2 godine (pravokutnik + 2 godine za koliko je Karolina starija od Blaženke/Ane i još 2 godine koliko je on stariji od nje). Njegove godine možemo prikazati kao godine Blaženke/Ane i još 4. Nadalje, Tihomir je 3 godine stariji od Ane/Blaženke te se on prikazuje kao Blaženka/Ana i još 3 godine. Uspoređujući pravokutnike može se primijetiti da je u obitelji najstariji Danijel koji je 4 godine stariji od Blaženke i Ane, zatim Tihomir koji je 3 godine stariji te Karolina koja je 2 godine starija. Blaženka i Ana su najmlađe jer su ostala braća od njih starija.

Zadatak: *Maja čita knjigu „Djeco, laku noć" koja ima 95 stranica. Prvoga dana pročitala je 8 stranica. Drugoga dana je pročitala tri puta više. Ostatak knjige odlučila je pročitati u 9 dana, svakoga dana jednaki broj stranica. Koliko stranica dnevno je trebala pročitati?* [10]



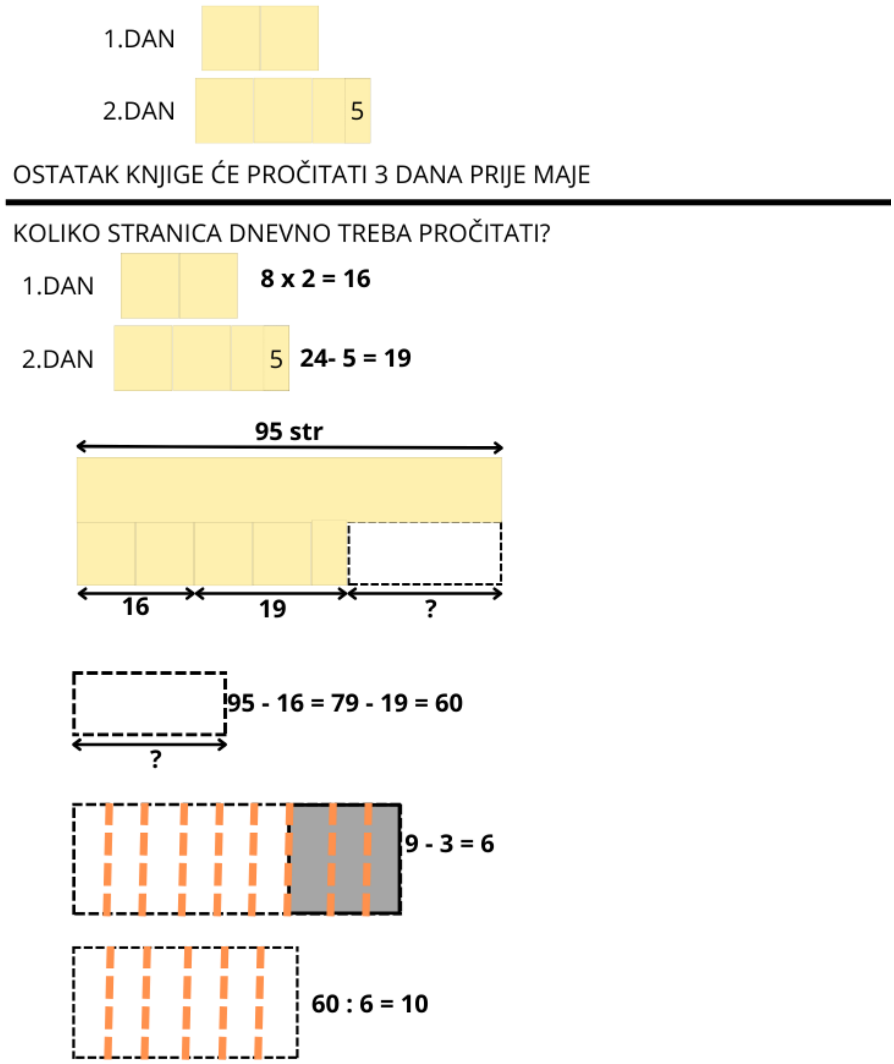
U zadatku je poznato da knjiga ima 95 stranica. Prvoga dana je Maja pročitala 8 stranica što je prikazano jednim žutim pravokutnikom, a drugog dana tri puta više (8 x 3 = 24) što je prikazano trima pravokutnicima. Oduzme li se broj stranica koje je pročitala prvog i drugog dana od ukupnog broja stranica, ostat će broj stranica koje Maja treba pročitati

[10] Grsko Miletić, A. Zadaci riječima. Matematika ljuta k'o paprika.

(63). U zadatku je također zadano da će Maja ostatak pročitati u 9 dana, čitajući svaki dan jednak broj stranica. Ostatak koji Maja tek treba pročitati se treba podijeliti na 9 jednakih dijelova kako bi se saznalo koliko stranica treba pročitati u jednom danu (63 : 9 = 7).

Maja treba dnevno pročitati 7 stranica knjige.

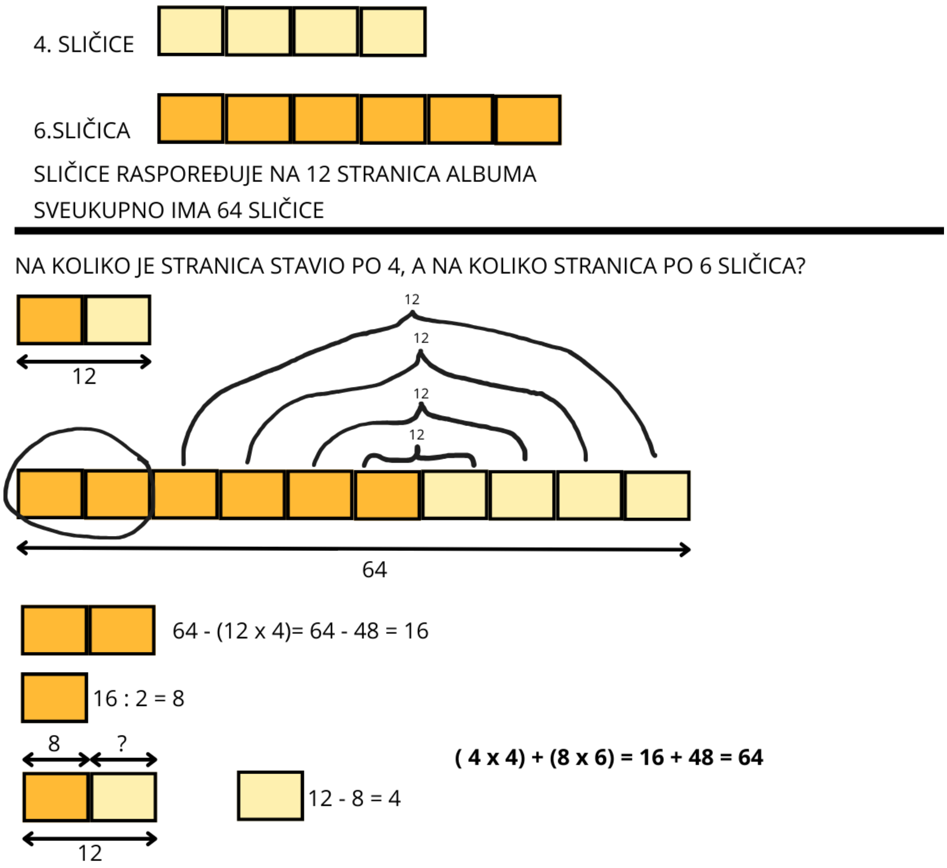
Mirna govori Maji: - Ja sam prvi dan pročitala duplo više od tebe. Drugi dan sam pročitala 5 stranice manje nego ti. Ostatak ću pročitati tri dana prije tebe. Koliko stranica dnevno moram pročitati?



U drugom dijelu zadatka je poznato da je Mirna prvog dana pročitala duplo više od Maje što se prikazuje dvama pravokutnicima (jer je Majin prvi dan prikazan jednim pravokutnikom). Drugi je dan pročitala 5 stranica manje od Maje što je prikazano trima pravokutnicima i odsječenim dijelom koji predstavlja 5 stranica manje. Postavlja se pitanje koliko stranica dnevno treba pročitati ako želi završiti s čitanjem 3 dana prije Maje. Oduzme li se broj stranica koje je pročitala prvog i drugog dana od ukupnog broja stranica, ostat će broj stranica koje Mirna treba pročitati (60). Nadalje, Mirna treba ostatak stranica pročitati 3 dana prije Maje. Maja ostatak stranica čita 9 dana, a Mirna mora pročitati u 6 dana (9 – 3 = 6). Dakle Mirna treba 60 stranica knjige pročitati u 6 dana.

Mirna treba dnevno pročitati 6 stranica knjige.

Zadatak: *Sličice morskih puževa Ivo je rasporedio na 12 stranica albuma tako da je na neke stranice stavio po 4, a na neke po 6 sličica. Na koliko je stranica Ivo rasporedio po 4, a na koliko po 6 sličica, ako je ukupno imao 64 sličice?*



U zadatku je poznato da Ivo ima ukupno 64 sličice koje treba rasporediti na 12 stranica album. Broj stranica na kojima su 4 sličice prikazan je žutim pravokutnikom, dok je narančasti pravokutnik velik onoliko koliko ima stranica sa 6 sličica. Ukupno su žuti i narančasti pravokutnik veliki 12. Ukupni broj sličica polijepljen po 4 iznosi četiri žuta pravokutnika, dok ukupni broj sličica potrošen na stranice od po 6 iznosi šest narančastih pravokutnika. To dvoje zajedno daju blok velik 64. Postavlja se pitanje na koliko je stranica Ivo stavio 4 sličice, a na koliko 6 sličica. Oduzimanjem 48 od 64 , što predstavlja da je na svaku stranicu stavljeno po 4 sličice, dobit će se 16. Dijeljenjem na 2 dobit će se 8 odnosno broj stranica na koje se stavlja po 6 sličica. Kako bi dobili broj stranica na koje je stavio po 4 sličice, od ukupnog broja stranica se treba oduzeti broj stranica na koje je stavio po 6 sličica (12 – 8 = 4). Ivo je na 4 stranice stavio po 4 sličice. Ta se rješenja mogu provjeriti množenjem kako bi se dobio ukupan broj sličica 64.

5.3.Primjena metode modela u trećem razredu osnovne škole

TRAJANJE: metoda je primjenjiva kroz cijelu školsku godinu jer se učenici susreću s mnogo jednostavnih i kompleksnih zadataka riječima

Primjena metode modela u trećem razredu nadograđuje dosadašnje poznavanje iste u prethodna dva razreda osnovne škole. Iako se u prva dva razreda ujedno primjenjivala, možemo ju definirati tek kao uvođenje odnosno učenje u sferi osnovnih računskih operacija s kojima su se učenici susreli. U nastavku obrazovanja slijedi njezina potpunija i kompleksnija primjena s obzirom na proširenje gradiva. U trećem razredu metoda modela može biti primjenjiva u mnogo nastavnih jedinica. Učenici se mogu njome služiti za vizualizaciju većih brojeva ili rješavanje kompleksnijih zadataka.

1. **Primjena četiriju računskih operacija na brojevima do 100**

Cilj: ponoviti primjenu računskih operacija na brojevima do 100 koristeći metodu modela

Trajanje: 2 sata

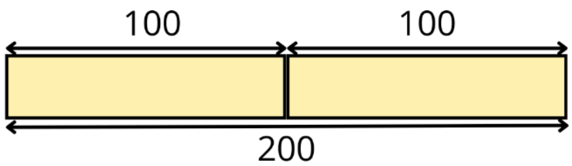
Poznavanje i razumijevanje već usvojenog gradiva računskih operacija na brojevima do 100 i njihovo grafičko prikazivanje je ključno za uspješno proširivanje znanja na sustav većih brojeva. Važno je da učenici temeljito poznaju prethodno usvojene koncepte kako bi daljnje proširenje sadržaja bilo razumljivo.

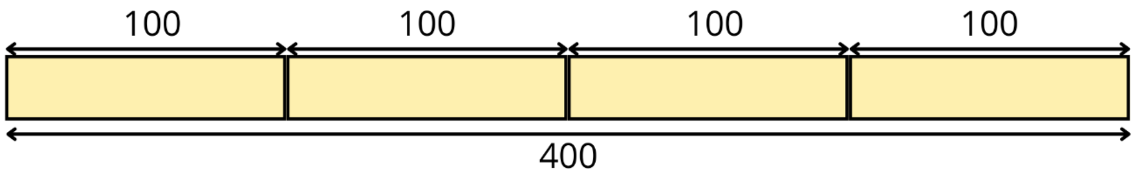
2. **Višekratnici broja 100**

Cilj: razviti sposobnost prepoznavanja i vizualizacije višekratnika broja 100 grafičkim prikazima. Steći vještine usporedbe i korištenja većim brojevima.

Trajanje: 4 sata

Učenici će moći usvojiti koncepte višekratnika broja 100 primjenom grafičke metode koja će im omogućiti jasnu vizualizaciju i usporedbu većih brojeva. Ovakav pristup se već primjenjuje u nastavi, primjerice kod prikazivanja višekratnika broja 10, gdje se prikazuje simboličkim novčanicama. Kroz dosadašnje prikazivanje pravokutnicima obrađivao se sustav brojeva do 100. Takav način prikazivanja može biti osnova za daljnje razumijevanje višekratnika. Prikazivanjem broja 100 grafičkim prikazom učenici će moći uočiti strukturu i odnose među višekratnicima te razviti intuitivno shvaćanje kako se brojevi povećavaju u skladu s dekadskim sustavom.





3. Primjena računskih operacija na brojevima do 1000

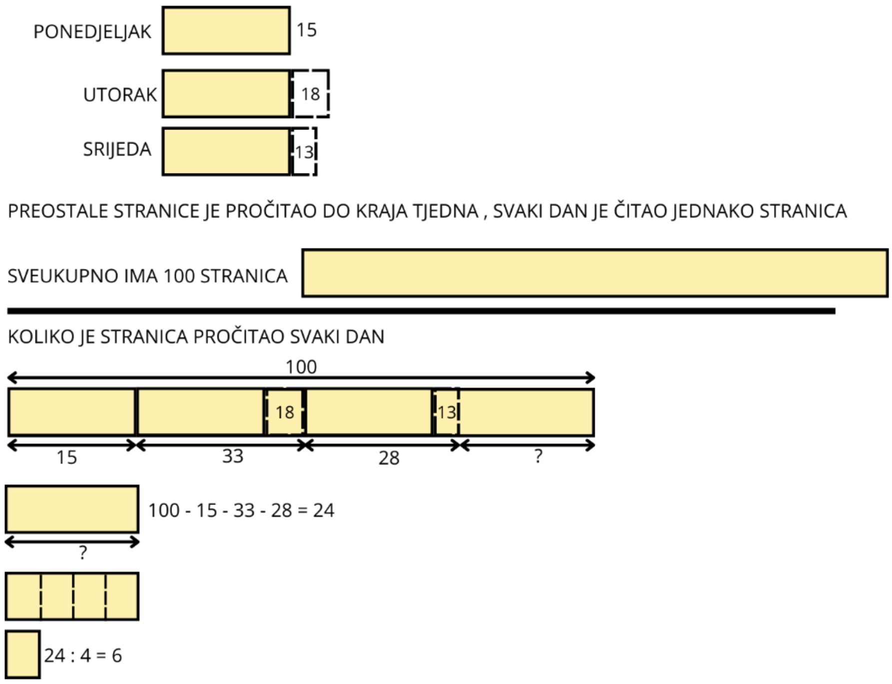
Cilj: primijeniti računske operacije u proširenom opsegu brojeva do 1000 koristeći se metodom modela

Trajanje: 8 sati

Metoda modela se može koristiti za rješavanje zadataka u više koraka omogućujući učenicima da zadani problem podjele i riješe korak po korak. I u ovom se razredu metodom modela jasno prikazuju i lako rješavaju relativno rutinski zadaci, primjerice sljedeći.

Zadatak: *Jakov je u ponedjeljak pročitao 15 stranica knjige. U utorak je pročitao 18 stranica više, a u srijedu 13 stranica više nego u ponedjeljak. Preostale stranice knjige je pročitao do kraja tjedna. Ako knjiga ima 100 stranica i ako je svaki preostali dan u tjednu čitao jednako stranica, koliko je stranica pročitao svaki dan?*[11]

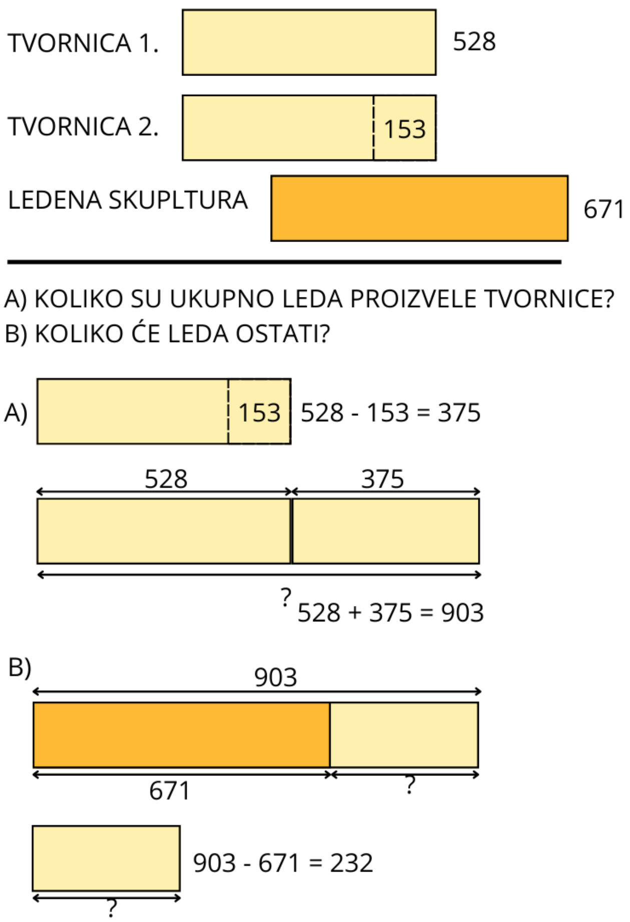
[11] Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Tkalčec, D., Lažeta, Ž. (2023). *Super matematika za prave tragače.* Radni udžbenik za 3. razred osnovne škole. 1. dio. Profil Klett.



U zadatku je zadano da je Luka u ponedjeljak pročitao 15 stranica knjige te se prikazuje jednim pravokutnikom. Sljedeći je dan pročitao 18 stranica više te se prikazuje istim pravokutnikom i još 18. U srijedu je pročitao 13 stranica više nego u ponedjeljak te se prikazuje kao pravokutnik ponedjeljka i još 13. Također je zadano da knjiga ima 100 stranica (prikazuje se dužim pravokutnikom). Preostale stranice treba pročitati do kraja tjedna, a svaki dan treba čitati jednak broj stranica. Da bi saznali koliko mu je stranica ostalo, od ukupnog broja stranica oduzimaju se stranice koje je pročitao u prva tri dana tjedna. Kada se to izračuna, ostane 24 stranice za pročitati. Njih mora pročitati u ostatku tjedna, odnosno u četvrtak, petak, subotu i nedjelju. Kako bi saznali koliko stranica treba pročitati svaki dan, ukupan broj preostalih stranica se dijeli s 4 (koliko je dana ostalo u tjednu (7 – 3 = 4).

Svaki dan je pročitao 6 stranica.

Zadatak: *Jedna je tvornica proizvela 528 kg leda, a druga 153 kg manje. Koliko su ukupno leda proizvele tvornice. Ako se za izradu ledene skulpture potroši 671 kg, koliko će leda ostati?*[12]

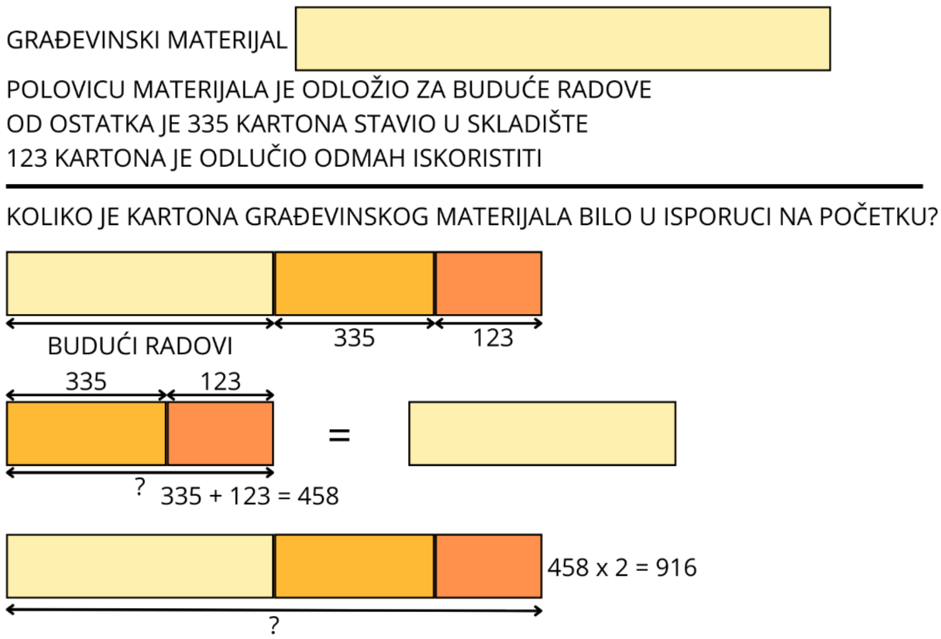


U zadatku je poznato da je jedna tvornica proizvela 528 kg leda te se ona prikazuje jednim žutim pravokutnikom. Druga tvornica je proizvela 153 kg manje te se prikazuje tim istim pravokutnikom koji ima odsječen dio za koliko ima manje od prve tvornice. Poznato je da se za izradu ledene skulpture potroši 671 kg leda što je prikazano narančastim pravokutnikom. Prvi dio pitanja se odnosi na ukupan broj proizvedenog leda obje tvornice. Prvi korak je izračunavanje proizvodnje leda u drugoj tvornici. Oduzimanjem količine leda koja se manje proizvede od ukupne količine leda prve tvornice dobit će se proizveden led u drugoj tvornici (375). Zbrajanjem proizvedenog leda obje tvornice dobit će se ukupna količina proizvedenog leda (903). U drugom dijelu zadatka se treba izračunati koliko će leda ostati ako je za izradu ledene skulpture potrebno 671 kg leda.

[12] Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Tkalčec, D., Lažeta, Ž. (2023). *Super matematika za prave tragače.* Radni udžbenik za 3. razred osnovne škole. 1. dio. Profil Klett.

Oduzimanjem te količine od ukupne količine proizvedenog leda tvornica, dobit će se količina leda koja se neće iskoristiti za izradu skulpture (232). *Ostat će 232 kg leda.*

Zadatak: *Markov otac je dobio isporuku građevinskog materijala za svoje projekte. Polovicu materijala je odložio za buduće radove. Od preostalog materijala, 335 kartona je stavio u skladište. Na kraju mu je ostalo 123 kartona koje je odlučio odmah iskoristiti. Koliko je kartona građevinskog materijala bilo u isporuci na početku?*[13]



U zadatku je poznato da je Markov otac dobio građevinski materijal koji je prikazan jednim velikim žutim pravokutnikom. Polovicu je odložio za buduće radove. Od druge polovice je odložio 335 kartona u skladište što je prikazano narančastim pravokutnikom te od iste polovice mu je ostalo 123 kartona materijala koje je odlučio iskoristiti odmah (prikazano tamno narančastim pravokutnikom). Materijal iz skladišta i materijal koji je odlučio odmah iskoristiti čine polovicu ukupnog materijala. Zbroje li se (458) pa pomnože s dva (jer je to točno pola materijala) dobit će se ukupan građevinski materijal.

Na početku je u isporuci bilo 916 kartona građevinskog materijala.

[13] Playground. A collection of math word problem for grades 1 to 6. Addition and subtraction 1. Challenge problems. Set 8.

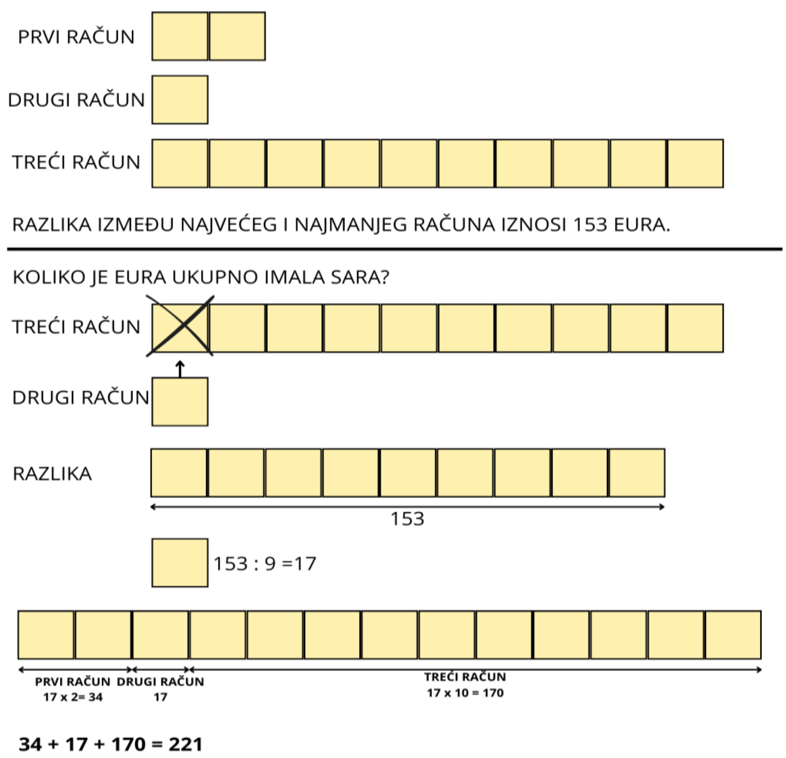
4. Rješavanje kompleksnih zadataka riječima

Cilj: primijeniti prethodno stečeno znanje te koristeći grafičko-aritmetičke prikaze rješavati kompleksnije zadatke riječima

Trajanje: kroz cijelu školsku godinu

U trećem razredu učenici rješavaju zadatke s brojevima do 1000 što ponekad zahtijeva prilagodbu u prikazivanju i rješavanju zadataka. Zadaci postaju kompleksniji i često uključuju više koraka kombinirajući nekoliko računskih operacija. Učenici bi na ovoj razini obrazovanja trebali sa sigurnošću moći izdvojiti ključne informacije iz teksta te ih pravilno organizirati kroz grafički prikaz.

Zadatak: *Sara ima 3 računa. Prvi račun je dvostruko veći od drugog računa. Treći račun je deset puta veći od iznosa drugog računa. Razlika između najvećeg i najmanjeg računa iznosi 153 eura. Koliko je eura ukupno imala Sara?* [14]

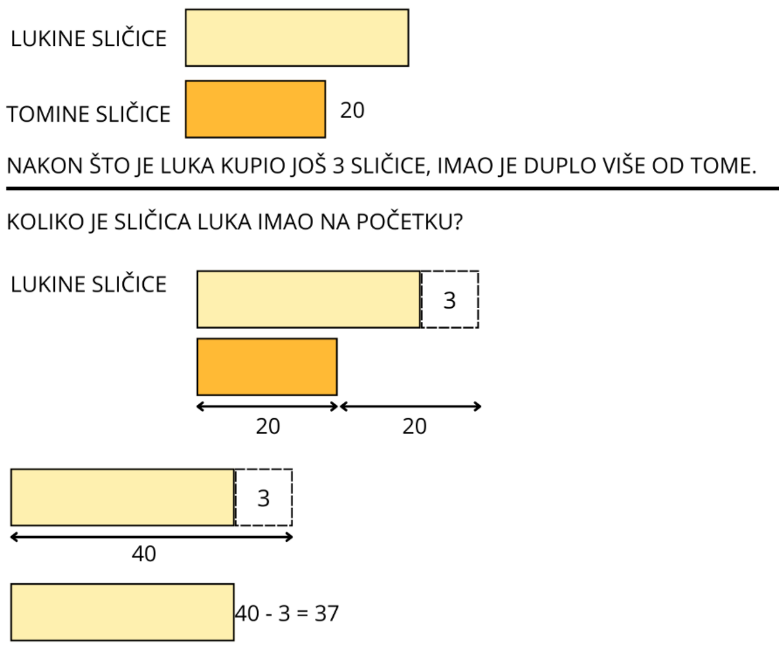


[14] Thinking kids. (2015). Singapore math. Level 3 A&B. *Challenge questions.* Carson- Dellosa Publishing LLC.

U zadatku je poznato da je prvi račun duplo veći od drugog računa. Stoga drugi račun možemo prikazati jednim pravokutnikom, a prvi račun kao 2 pravokutnika. Treći račun je prikaz kao 10 pravokutnika jer je treći račun 10 puta veći od drugog računa. Nadalje, poznato je da je razlika između najvećeg i najmanjeg računa 153. Oduzimanjem jednog pravokutnika od najvećeg niza pravokutnika treći račun) ostaje 9 pravokutnika. Oni iznose 153. Podijeli li se 153 s 9 pravokutnika, dobit će se cijena drugog računa (17). Cijena prvog računa je duplo veća (34), a cijena trećeg računa je deset puta veća (170). Zbrajanjem svih računa dobit će se ukupan iznos eura koje je imala Sara.

Sara je ukupno imala 221 euro.

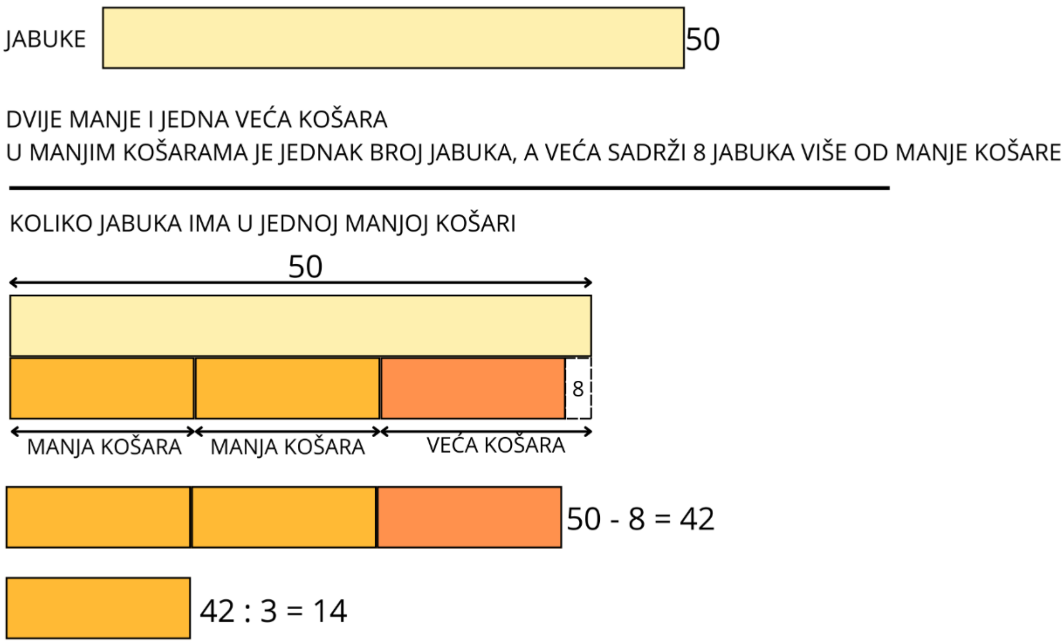
Zadatak: *Luka ima nekoliko sličica. Njegov prijatelj Toma ima 20 sličica. Nakon što je Luka kupio još 3 sličice, imao je duplo više sličica od Tome. Koliko je sličica Luka imao na početku?*



U zadatku je poznato da Luka ima nekoliko sličica što je prikazano žutim pravokutnikom, a da Toma ima 20 sličica što je prikazano narančastim pravokutnikom. Nadalje, kada je Luka kupio još 3 sličice imao je duplo više od Tome. Ako Toma ima 20 sličica, onda Luka sa svoje 3 novokupljene sličice ima 40 (20 x 2 = 40). Kako bi saznali koliko je sličica Luka imao na početku, od njegovih sadašnjih sličica se trebaju oduzeti 3 koje je kupio.

Luka je na početku imao 37 sličica.

Zadatak: *50 jabuka raspoređeno je u dvije manje i jednu veću košaricu. U manjim je košaricama jednak broj jabuka, a veća sadrži osam jabuka više od (svake) manje košarice. Koliko jabuka ima u jednoj manjoj košarici?*[15]

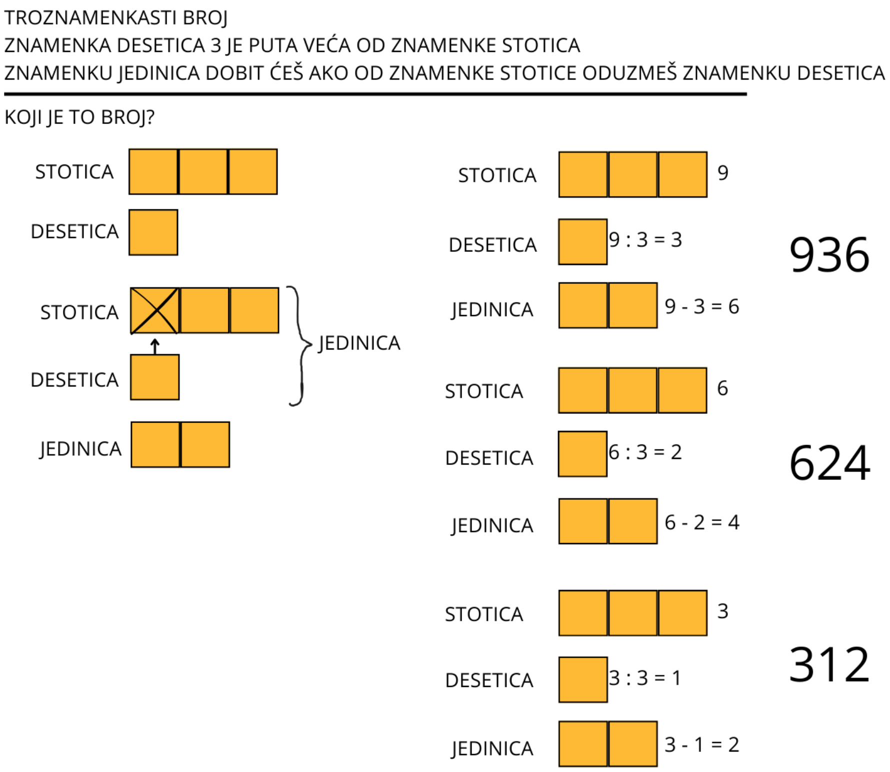


U zadatku je poznato da je 50 jabuka raspoređeno u dvije manje (jednake košare) i jednu veću košaru. Nadalje je poznato da veća košara sadrži 8 jabuka više od svake manje košare. To znači da je veća košara jednaka jednoj manjoj i još osam jabuka koje sadrži. Prikažemo dvije manje košare dvama pravokutnicima jednake boje. Veća košara je prikazana pravokutnikom tamno narančaste boje (veličinom jednak kao i pravokutnik male košare) i malim dijelom koji iznosi 8. Oni zajedno iznose 50. Oduzimanjem 8 jabuka velike košare od ukupnog broja jabuka, dobit će se broj jabuka u trima malim košarama (odnosno dvije male i jedna velika). Podijelimo li taj broj (42) s brojem košara (3) dobit će se broj jabuka u jednoj maloj košarici.

U jednoj maloj košarici ima 14 jabuka.

[15] Festival matematike u Puli. (2017). Piko. Zadaci za 3. i 4. razred.

Zadatak: *Luka i Jure igraju igru pogađanja brojeva. Jure je ovako opisao svoj broj: Moj broj ima 3 znamenke. Znamenka desetica tri je puta manja od znamenke stotica. Znamenku jedinica dobit ćeš ako od znamenke stotica oduzmeš znamenku desetica. Možeš li pomoći Luki da otkrije Jurin broj. Ima li više brojeva koji odgovaraju Jurinu opisu?*[16]



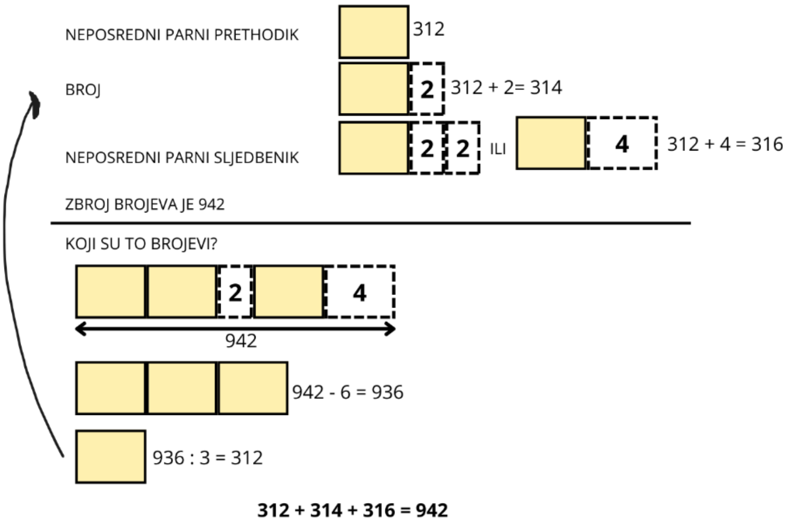
U zadatku je poznato da je Luka zamislio troznamenkasti broj koji ima 3 znamenke. Znamenka desetica je 3 puta manja od znamenke stotice te ju prikazujemo jednim narančastim pravokutnikom. Znamenku stotice prikazujemo trima pravokutnicima jer je tri puta veća od znamenke desetice. Oduzimanjem znamenke desetice od znamenke stotice dobit će se znamenka jedinice. Oduzmemo li jedan pravokutnik od tri pravokutnika dobit ćemo dva pravokutnika. Zatim slijedi pridodavanje vrijednosti svakoj znamenki. Kako bi saznali koji su to brojevi, važno je uvidjeti da broj svake znamenke mora biti djeljiv s 3. Najveća znamenka je 9, ona je djeljiva s 3 te znamenka desetice iznosi 3. Oduzimanjem znamenke desetice od znamenke stotice dobit će se znamenka jedinice (9-3=6). Brojevi 8 i 7 nisu djeljivi s 3. Sljedeća najveća znamenka je 6, ona je

[16] Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Tkalčec, D., Lažeta, Ž. (2023). *Super matematika za prave tragače.* Radni udžbenik za 3. razred osnovne škole. 1. dio. Profil Klett.

djeljiva s 3 te znamenka desetice iznosi 2. Oduzimanjem znamenke desetice od znamenke stotice dobit će se znamenka jedinice (6-2=4). Brojevi 5 i 4 nisu djeljivi s 3. Sljedeća znamenka stotice može biti 3 jer je djeljiva s 3 te znamenka desetice iznosi 1. Oduzimanjem znamenke desetice od znamenke stotice dobit će se znamenka jedinice (3-1=2).

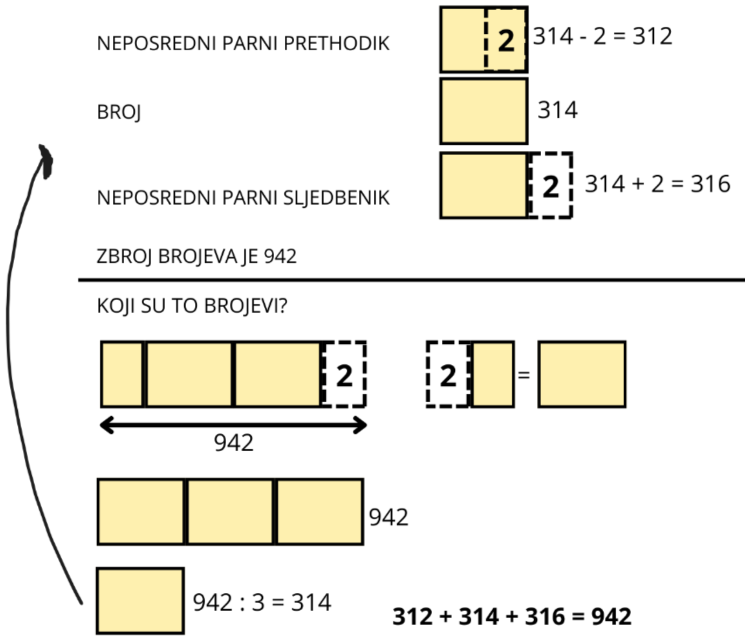
Više brojeva odgovora Lukinom opisu. To su brojevi 936, 624 i 312.

Zadatak: *Zbroj broja, njegovog neposrednog parnog prethodnika i neposrednog parnog sljedbenika je 942. Koji su to brojevi?*



Zadano je da je zbroj broja, neposrednog parnog prethodnika i neposrednog parnog sljedbenika 942. Učenici znaju da su parni brojevi višekratnici broja dva, te da je svaki sljedeći broj veći za 2. Pravokutnikom se može prikazati neposredni parni prethodnik jer je najmanji među brojevima. Ako taj broj predstavimo kao osnovu za računanje, onda je „broj" njegov neposredni parni sljedbenik. Taj broj prikazujemo pravokutnikom i dijelom od 2. Nadalje, neposredni parni sljedbenik je od neposrednog parnog prethodnika veći za 4 te je on prikazan kao pravokutnik i još dio od 4. Brojevi zajedno iznose 942. Oduzimanjem dijelova za koliko su veći od prvog broja dobit će se zbroj triju jednakih brojeva (942-6=936). Dijeljenjem na 3 dobit će se najmanji broj (neposredni parni prethodnik). To je broj 312. Neposredni parni sljedbenik tog broja je 314, a drugi neposredni parni sljedbenik je 316. Oni zajedno iznose 942.

To su brojevi 312, 314 i 316.



Drugi mogući način prikazivanja je da pravokutnikom prikaže broj, odnosno da se neposredni parni prethodnik prikaže kao pravokutnik i dio koji je odsječen za 2. Neposredni parni sljedbenik se prikazuje kao pravokutnik i dodatni dio za 2. Oni zajedno iznose 942 jer dodatni dio (2) i odsječeni dio (2) čine jedan pravokutnik. Dijeljenjem na 3 dobit će se broj 314. Neposredni parni prethodnik je 312, a neposredni parni sljedbenik tog broja je 316. Oni zajedno iznose 942.

5.4. Primjena metode modela u četvrtom razredu osnovne škole

TRAJANJE: metoda modela se u četvrtom razredu osnovne škole može primijeniti na razini cjelogodišnjeg gradiva budući da se učenici susreću s još kompleksnijim brojevima i zadacima.

Primjena metode modela u četvrtom razredu osnovne škole se proširuje. S obzirom na povećanje brojevnog sustava i kompleksnih zadataka, metoda pomaže učenicima u vizualizaciji specifičnih problemskih zadataka, kao i u vizualizaciji odnosa među brojevima do milijun. Iako se algebarska domena spominje i u trećem razredu, ona je u kompleksnijem prikazu dostupna u četvrtom razredu. Na ovoj se razini po prvi put mogu pojaviti najjednostavniji algebarski zadaci koji mogu predstavljati izazov u razumijevanju. Metode modela osmišljena je kako bi učenicima olakšala postepeno usvajanje algebarskih prikazivanja koristeći jednostavne modele (pravokutnike) za predstavljanje nepoznatih vrijednosti. Metoda modela se u četvrtom razredu može provući kroz sve domene kurikula.

1. **Ponavljanje sadržaja trećeg razreda (računske operacije na brojevima do 1000)**

Cilj: osigurati temeljito razumijevanje računskih operacija do 1000 pomoću metode modela kako bi učenici mogli lakše prijeći na složenije brojevne sustave.

Trajanje: 2 sata

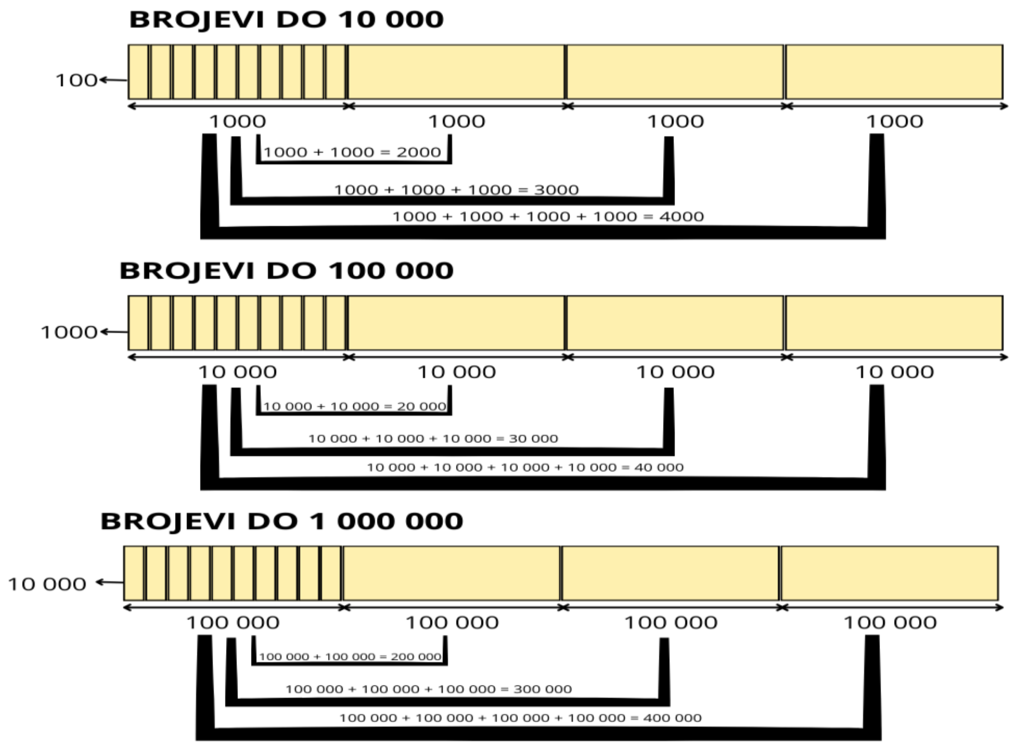
Ponavljanjem gradiva učenici osiguravaju čvrsto predznanje za daljnje proširenje gradiva koje uključuje sustave većih brojeva. Važno je da učenici na temelju riješenih problemskih zadataka mogu prepoznati slične zadatke, ali s većim brojevnim sustavom.

2. **Brojevi do 10 000, 100 000 i 1 000 000**

Cilj: proširiti znanje o brojevima do 10 000, 100 000 i 1 000 000 te vježbati prikazivanje grafičko-aritmetičkim modelom.

Trajanje: 14 sati

Iako se na kraju trećeg razreda spominju brojevi do 10 000, oni se konkretnije obrađuju na početku četvrtog razreda. Grafičko prikazivanje može omogućiti učenicima da vide razliku između tisućica, stotica, desetica i jedinica. Nadalje se gradivo proširuje na sustav brojeva do 10 000 pa do 1 000 000. Grafički prikazi mogu pojednostaviti strukturiranje zadataka koji obuhvaćaju brojeve do milijun. Ovakav pristup već se primjenjuje u nastavi kod prikazivanja višekratnika broja 100, gdje se koristi simbolika novčanica. Takvo prikazivanje pomaže učenicima da lakše usvoje apstraktne pojmove kroz konkretne primjere.



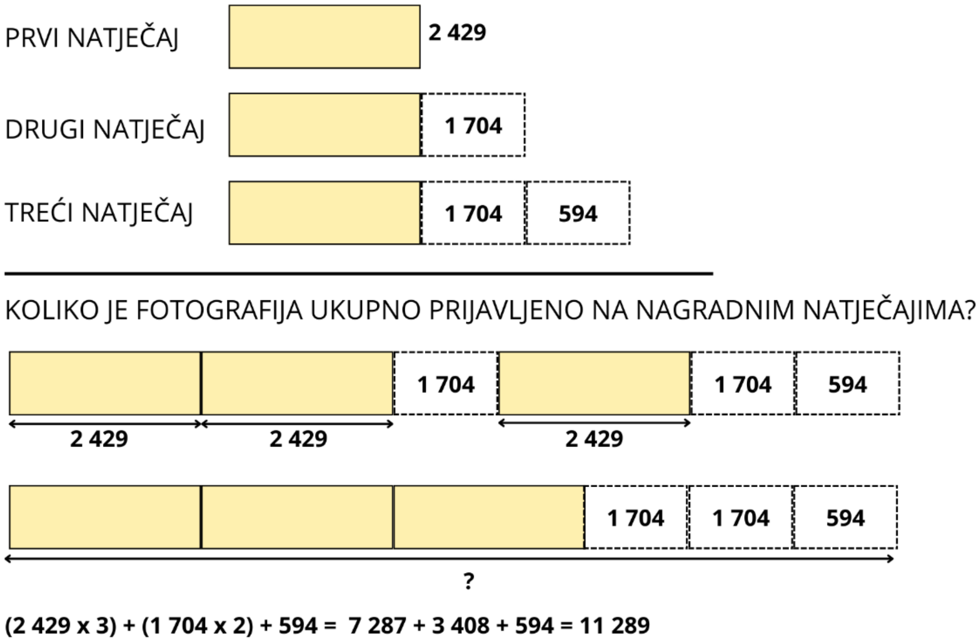
3. Primjena četiriju računskih operacija na brojevima do 1 000 000

Cilj: primijeniti znanje o prikazivanju metodom modela u zbrajanju, oduzimanju, množenju, dijeljenu brojeva do milijun.

Trajanje: tijekom cijele školske godine

Učenici će moći koristiti metodu modela za prikazivanje četiriju računskih operacija u skupu brojeva do milijun. Značajnost metode modela se može odraziti u zadacima koji uključuju rješavanje u više koraka. Kroz primjere su navedeni zadaci koji se mogu pronaći u udžbenicima iz matematike, a mogu se riješiti metodom modela.

Zadatak: *Održana su tri nagradna natječaja za najbolje snimljenu fotografiju mobilnim telefonom. Na prvi natječaj prijavljeno je 2 429 fotografija, na drugi natječaj 1 704 fotografije više, a na treći natječaj 594 fotografije više nego na drugi natječaj. Koliko je fotografija ukupno prijavljeno na nagradnim natječajima?*[17]



Poznato je da je na prvi natječaj prijavljeno 2 429 fotografija što prikazujemo jednim pravokutnikom. Na drugi je natječaj prijavljeno jednako fotografija i još 1 704 fotografije više. To prikazujemo jednakim pravokutnikom i još jednim pravokutnikom koji predstavlja koliko je fotografija više prijavljeno nego na prvom natječaju. Treći natječaj prikazujemo kao drugi natječaj i još jedan pravokutnik jer je u zadatku zadano da je prijavljeno još 594 fotografije više. U zadatku se traži ukupan broj fotografija. Jednaki blokovi se mogu pomnožiti, a zatim zbrojiti.

Na nagradnim natječajima je ukupno prijavljeno 11 289 fotografija.

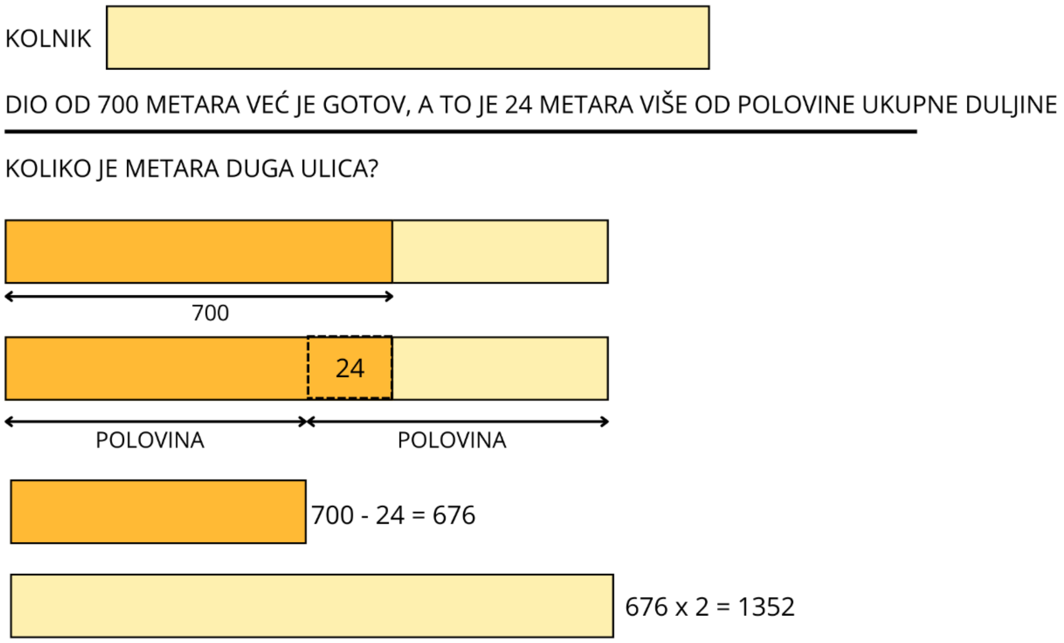
[17] Martić, M., Ivančić, G., Dunatov, J., Brničević Stanić, M., Martinić Cezar, J.(2023). *Super matematika za prave tragače.* Radni udžbenik za 4. razred osnovne škole. 1. dio. Profil Klett.

4. Rješavanje jednostavnih i kompleksnih zadataka riječima

Cilj: primijeniti stečeno znanje o grafičkom strukturiranju na kompleksnijim zadacima.

Trajanje: tijekom cijele školske godine

Zadatak: *Popravlja se kolnik neke ulice. Dio od 700 metara već je gotov, a to je 24 metara više od polovine ukupne duljine ulice. Koliko je metara duga ulica?*[18]

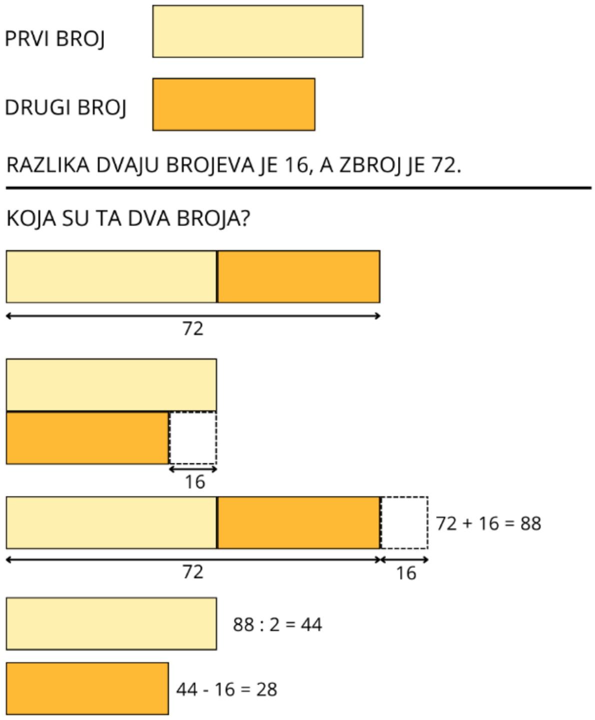


Poznato je da je dio kolnika od 700 metara popravljen, što je 24 metara manje od polovice ukupne duljine ulice. Ukupna duljina kolnika ulice je prikazana velikim žutim pravokutnikom. Dio koji je popravljen je prikazan narančastim pravokutnikom. Oduzmu li se 24 metara popravljenog kolnika dobit će se polovica duljine ulice (676).

Ulica je duga 1 352 metara.

[18] Festival matematike u Puli. (2017). Piko. Zadaci za 3. i 4. razred.

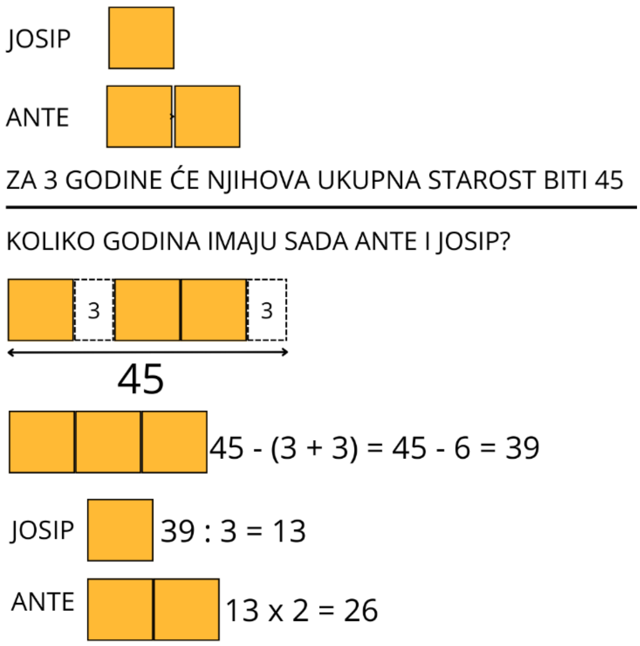
Zadatak: *Razlika dvaju brojeva je 16, a njihov zbroj je 72. Koja su ta dva broja?*



Poznato je da je zbroj dvaju brojeva 72 te da je razlika brojeva 16. To znači da brojevi nisu jednaki. Prvi broj je prikazan žutim pravokutnikom (veći), a drugi broj narančastim pravokutnikom (manji). Ta dva bloka čine blok od 72. Razlika označava da je drugi blok za 16 manji od prvog bloka, odnosno da je prvi blok za 16 veći od drugog bloka. Dodavanjem te razlike, dobit će se dva jednaka bloka (72+16=88). Dijeljenjem 88 s brojem blokova dobit će se prvi odnosno veći broj. Oduzimanjem razlike od većeg broja, dobit će se manji broj.

Prvi broj je 44, a drugi broj je 28.

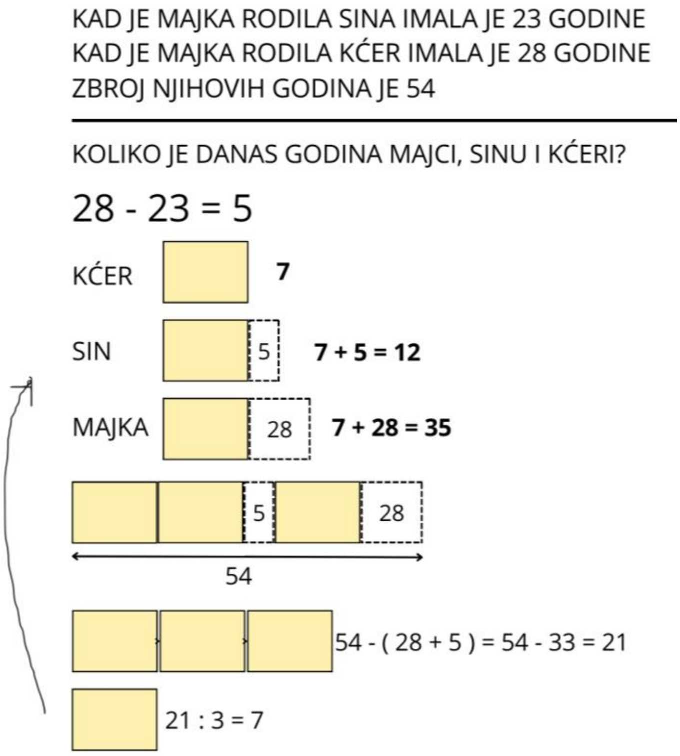
Zadatak: *Ante je dvostruko stariji od brata Josipa, a za tri godine će njihova ukupna starost biti 45 godina. Koliko godina imaju Ante i Josip sada?*



Poznato je da je Ante duplo stariji od Josipa. Josipove godine su prikazane jednim narančastim pravokutnikom, a Antine godine dvama pravokutnicima. Nadalje je poznato da će za 3 godine zajedno imati 45 godina. Za tri godine će obojica imati 3 godine više, stoga se uz obojicu pridodaje još jedan pravokutnisonik koji predstavlja 3 godine više. Oduzme li se njihovih 6 godina, za koliko će zajedno biti stariji za 3 godine, dobit će se njihove zajedničke godine sada (39). Dijeljenjem ukupnog broja godina s 3 (koliko je pravokutnika), dobit će se starost Josipa (13).

Josip ima 13 godina, a Ante ima 26 godina.

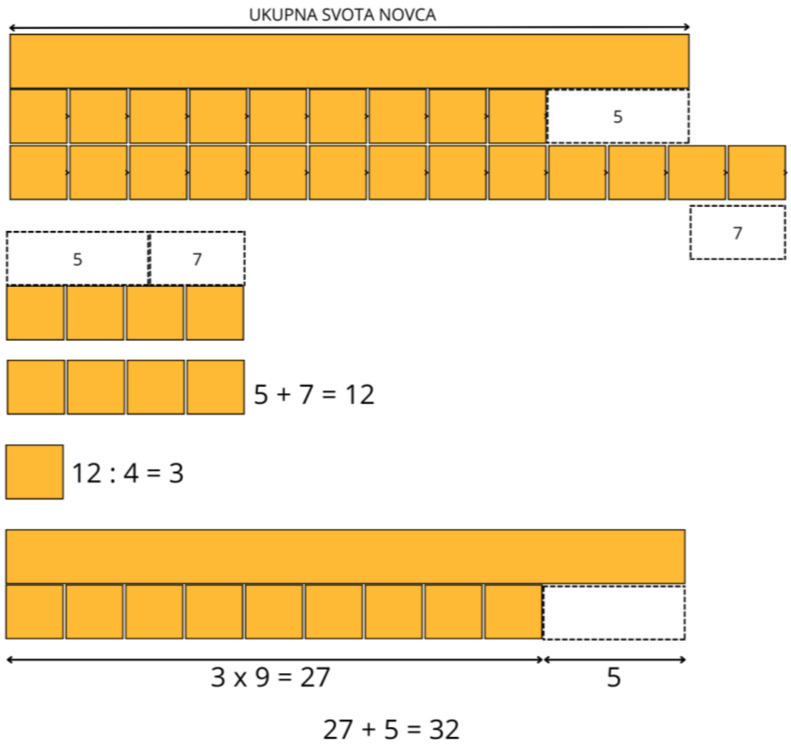
Zadatak: *Kad je majka rodila sina bile su joj 23 godine, a kada je rodila kći imala je 28 godina. Koliko je danas godina majci, sinu i kćeri ako je zbroj njihovih godina 54?*



U zadatku je poznato da je majka rodila sina kad su joj bile 23 godine, a kada je rodila kći imala je 28 godina. Jasno da je sin imao 5 godina kad se rodila njegova sestra (28-23=5). Kćer je prikazana jednim pravokutnikom, brat jednakim pravokutnikom i još jednim koji predstavlja da je 5 godina stariji od nje. Majka je prikazana kao kći uz još jedan pravokutnik koji iznosi onoliko godina koliko je starija od nje, odnosno koliko je godina ima kada se rodila kći (28). Zadano je da zajedno imaju 54 godine. Oduzmemo li godine koliko su majka i sin stariji od kćeri, dobit će se broj godina triju kćeri (54-33=21). Dijeljenjem s 3 (koliko je pravokutnika) dobit će se godine kćeri.

Kćer ima 7 godina, sin ima 12 godina, a majka ima 35 godina.

Zadatak: *Ivan ima određenu svotu (iznos) novaca. Kada bi kupio 9 HB olovaka, ostalo bi mu 5 eura, a kada bi kupio 13 HB olovaka, nedostajalo bi mu 7 eura. Koliko novaca ima Ivan?*[19]

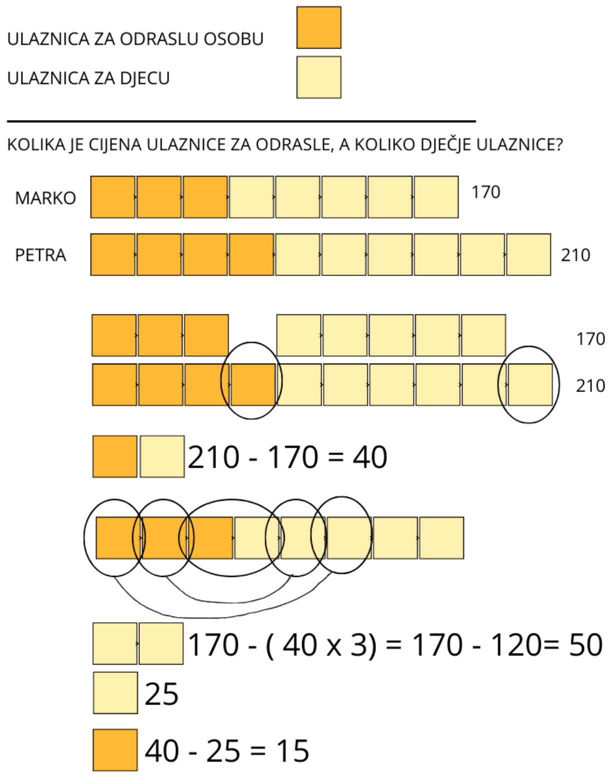


Količina Ivanovog ukupnog novca je prikazana velikim narančastim pravokutnikom. Poznato je da kad bi Ivan kupio 9 olovaka ostalo bi mu 5 eura. Olovke su prikazane pojedinačnim pravokutnicima, a 5 eura dijelom koji ostane od ukupne količine. Nadalje je poznato da ako kupi 13 bi mu nedostajalo 7 eura. Olovke su prikazane jednakim pravokutnicima, a dio koji nedostaje pravokutnikom koji je veći od ukupne količine novca. Prema prikazu je vidljivo da 5 eura koji preostaju i 7 eura koji mu nedostaju obuhvaćaju 4 olovke. Stoga one ukupno koštaju 12 eura. Jedna olovka košta 3 eura (12:4=3). Da bi se saznalo koliki je ukupan iznos Ivanovog novca, učenici se mogu vratiti u prvi dio zadatka koji se odnosi 9 olovaka i 5 eura koji mu preostaju. Množenjem broja olovaka s cijenom jedne olovke, a zatim pribrajanjem ostatka novca dobit će se Ivanova svota novca.

Ivan ima 32 kune.

[19] Festival matematike u Puli. (2017). Piko. Zadaci za 3. i 4. razred.

Zadatak: *Marko je kupio 3 ulaznice za odrasle i 5 dječjih ulaznica za ukupno 170 eura. Petra je kupila 4 ulaznice za odrasle i 6 dječjih ulaznica za ukupno 210 eura. Kolika je cijena ulaznice za odrasle, a kolika dječje ulaznice?*



Ulaznica za odraslu osobu je prikazana narančastim pravokutnikom, a ulaznica za djecu žutim pravokutnikom. Markove ulaznice iznose 170 eura, a Petrine ulaznice 210 eura. U prikazu se može primijetiti da je Petra kupila jednu ulaznicu za odrasle i jednu ulaznicu za djecu više od Marka. Stoga cijenu tih ulaznica možemo dobiti oduzimanjem Markovog iznosa od Petrinog iznosa. Cijena dječje ulaznice i ulaznice za odrasle iznosi 40 eura. Recimo da jedan komplet ulaznica obuhvaća jednu dječju i jednu odraslu ulaznicu jer je cijena poznata. U Markovom prikazu se može uočiti da je kupio 3 kompleta po 40 eura. Ostaju dvije dječje ulaznice po cijeni od 50 eura (170-120= 50). Cijena jedne dječje ulaznice je 25 eura. Ako komplet dječje i odrasle ulaznice košta 40 eura, onda cijena ulaznice za odrasle košta 15 eura.

Cijena ulaznice za odrasle iznosi 15 eura, a cijena dječje ulaznice iznosi 25 eura.

6. ZAKLJUČAK

Cilj ovog rada bio je istražiti mogućnosti singapurske metode modela kao učinkovitog alata za rješavanje složenih zadataka riječima koji učenicima često predstavljaju izazov. U takvim zadacima, koji nisu samo pitanje aritmetičkog rješavanja već razumijevanje strukture problema, učenici se često suočavaju s osjećajem zbunjenosti i frustracije. Pitanje je jesu li ti zadaci doista „preteški i kompleksni“ ili je samo potrebno pronaći učinkovitu metodu koja će učenicima vizualno olakšati razumijevanje? Singapurska metoda modela nudi jasnu strukturu i vizualnu podršku potrebnu za savladavanje i najzahtjevnijih zadataka na toj razini obrazovanja.

Kako bi učenici mogli primijeniti ovu metodu u složenijim zadacima važno je da započnu učenje od prvog razreda. Iako se čini da neki osnovni zadaci ne zahtijevaju njezinu primjenu, upravo na tim najjednostavnijim primjerima postavlja se temelje za razumijevanje i primjenu metode. Postupno uvježbavanje na raznim primjerima omogućit će učenicima da vremenom steknu sigurnost, intuiciju i automatizaciju u rješavanju raznovrsnih zadataka. Takav proces može osnažiti učeničku samostalnost i kreativnost u pristupu zadacima. Primjenom metode učenici razvijaju algoritamsko mišljenje, odnosno analiziraju probleme u koracima te logičko zaključivanje. Takve misaone vještine stvaraju temelje za apstraktno mišljenje.

Kontinuirana primjena metode modela može omogućiti sustavno razvijanje vještina strukturiranja zadataka kod učenika. Ako se te vještine uspješno razviju, učenik je u mogućnosti postaviti zadatak odnosno veće su šanse da ga može i riješiti. Iako učenici u razrednoj nastavi ne rješavaju jednadžbe, metoda modela omogućuje im razumijevanje koncepata nepoznanica kroz jednostavne vizualne prikaze, čime se stvaraju temelji za kasniji rad s jednadžbama i uistinu težim zadacima. Štoviše, učenici na intuitivan i razumljiv način rješavaju zadatke koje će kasnije rješavati sustavom jednadžbi i tehničkim, apstraktnim manipulacijama jednadžbama. Osim toga, ovaj rad pruža konkretne smjernice za primjenu metode čime se stvara korisno polazište za učitelje koji ovu metodu žele uvesti u svoje učionice. Na taj način, singapurska metoda može postati praktičan priručnik, omogućujući drugačiji i intuitivniji pristup matematici.

7. LITERATURA

1. Baker, J. (2022). *Teaching gractions and radio through bar models.* The Cam Academy Trust. Pribavljeno 11. listopada 2024., sa https://maths.catrust.co.uk/posts/488
2. Clark, A. (2009). *Problem Solving In Singapore Math.* Math in Focus. The Singapore Approach. Pribavljeno 3. listopada 2024., sa http://storage.cloversites.com/nextgenerationschool/documents/MIFProbSolving.pdf
3. Clement, G. F. (2017*). Exploring the influence of the Singapore Modeling Method on prospective elementary teachers in a university mathematics course*. Doktorska disertacija, Georgia State University.
4. Dienes, Z. (2007). *Zoltan Paul Dienes and the Dynamics of Mathematical Learning*. U Sriraman., B. (ur.). Monografija 2. University of Montana.
5. EduKate Singapore. (2023.). *How to Prepare for Primary 1 Singapore Math: Analyzing the Cognitive Processes of Primary 1 Students*. EduKate Singapore. Pribavljeno 10. kolovoza 2024., sa https://edukatesingapore.com/2023/04/06/how-to-prepare-for-primary-1-singapore-math-analyzing-the-cognitive-processes-of-primary-1-students/
6. Fong, Ng, S. (2022). *The model method: Crown jewel in Singapore mathematics.* Asian Journal for Mathematics Education. (Vol.1.(2)., str: 147-161). National Institute of Education. Nanyang Tehnological University. Singapore.
7. Fong Ng, S., Lee, K. (2009). *The Model Method: Singapore Childrens Tool for Representing and Solving Agebraic Word Problems.* Journal for Research in Mathematics Education. file:///C:/Users/angel/Downloads/TheModelMethod%20(2).pdf
8. Hoven, J., Garelick, B. (2007). *Singapore Math: Simple or Complex?* Educational leadership. Journal of the Department of Supervision and Curriculum Development. N.E.A.

9. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). (1995). *TIMSS 1995: Trends in International Mathematics and Science Study.* Pribavljeno 10. kolovoza 2024., sa https://www.iea.nl/studies/iea/timss/1995
10. Jukić Matić, Lj., Mužar Horvat, S., Bognar, B. (2024). *Usporedba Montessori i singapurskog modela početne nastave matematike*. (Vol. 12.(1), str.203-215). Nova prisutnost.
11. Kho, T.H., Yeo, S.M., Fan, L. (2014). *Model method in Singapore primary mathematics textbooks.* International Conference on Mathematics Textbook Research and Development. Pribavljeno 7.8.2024., sa https://www.researchgate.net/profile/Lianghuo-Fan/publication/299448956_Model_Method_in_Singapore_primary_mathematics_textbooks/links/60d6f2a3a6fdccb745e4a5cb/Model-Method-in-Singapore-primary-mathematics-textbooks.pdf
12. Kaur, B. (2019). *The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems.* ZDM. Mathematics Education.
13. Kaur, B. (2014). *Evolution of Singapores School Mathematics Curriculum*. National Institute of Education. Singapore. Pribavljeno 7. kolovoza 2024., sa https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED572633.pdf
14. Liebeck, P. (1995.) Kako djeca uče matematiku. Zagreb: Educa.
15. Lindorff, A. M., Hall, J., & Sammons, P. (2019). *Investigating a Singapore-Based Mathematics Textbook and Teaching Approach in Classrooms in England*. (Vol.4.(37). Frontiers in Education. Pribavljeno 3.kolovoza 2024., sa https://doi.org/10.3389/feduc.2019.00037
16. OECD. (2011). *Strong performers and successful reformers in education:* Lessons from PISA for the United States.
17. Ramasamy, R., Puteh, M. (2019). *The Effectiveness of Bar Model to Enhance HOTs in Mathematics for Year 4 Pupils.* (Vol.8.(2)., str.200-204). International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development.
18. Širić, I. (2017). *Singapurska metoda modela*. Diplomski rad. Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku.

19. Tan, D. (2020). *How many schools in the USA has adopted the Singaporean method of teaching math?*. ChampionTutor. https://www.championtutor.com/blog/how-many-schools-in-the-usa-has-adopted-the-singaporean-method-of-teaching-math/
20. Tan, O. S., Low, E. L., Tay, E. G., & Yan, Y. K. (2021). *Singapore math and science education innovation.* (Vol.1., str.75-137). Beyond PISA. Springer. file:///C:/Users/angel/Downloads/Singapore%20math%20and%20science%20education%20innovation.pdf
21. Thirunavukkarasu, M., Senthilnathan, S. (2014). *Effectiveness of bar model in enhancing the learning of mathematics at primary level.* International Journal of Teacher Educational Research. (Vol.3.(1)., str.15-22).