

Istraživački usmjerena nastava Matematike u nižim razredima osnovne škole

Delivuk, Dora

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Rijeci, Učiteljski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:189:968995>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-22**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Teacher Education - FTERI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI
UČITELJSKI FAKULTET U RIJECI

Dora Delivuk

Istraživački usmjerena nastava Matematike u nižim razredima osnovne škole

DIPLOMSKI RAD

Rijeka, 2023.

SVEUČILIŠTE U RIJECI

UČITELJSKI FAKULTET U RIJECI

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni Učiteljski studij

Istraživački usmjerena nastava Matematike u nižim razredima osnovne škole

DIPLOMSKI RAD

Predmet: Matematika 2

Mentorica: Sanja Vranić, prof., pred.

Studentica: Dora Delivuk

Matični broj: 0130311954

U Rijeci,

rujan 2023.

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da sam diplomski rad izradila samostalno, uz preporuke i savjetovanje s mentoricom. U izradi rada pridržavala sam se Uputa za izradu diplomskog rada i poštovala odredbe Etičkog kodeksa za studente/studentice Sveučilišta u Rijeci o akademskom poštenju.

Dora Delivuk

Dora Delivuk

SAŽETAK

Istraživački usmjerena nastava Matematike pristup je učenju i poučavanju u kojem učenici postupaju poput matematičara kako bi konstruirali znanje. Pristup potiče učenike na postavljanje pitanja, istraživanje matematičkih koncepata i surađivanja radi pronalaženja odgovora. Istraživački usmjerena nastava produbljuje razumijevanje matematike i pospješuje kritičko razmišljanje, rješavanje problema i komunikacijske vještine učenika. Pozitivno utječe na stavove i motivaciju učenika prema matematici, čineći je zanimljivijom i relevantnijom za njihov život. Učitelj ima ulogu vodiča koji usmjerava proces učenja i osigurava okruženje za istraživanje. Istraživački usmjerena nastava Matematike zahtijeva pažljivo planiranje kako bi se uravnotežilo usmjeravanje učitelja i samostalno istraživanje učenika. Uz odgovarajuću obuku i podršku učitelji mogu uspješno provesti ovaj pristup i stvoriti dinamično i zanimljivo okruženje za učenje koje učenicima nižih razreda osnovne škole pruža matematičke sposobnosti potrebne za cjeloživotno učenje.

Diplomski rad istražuje prednosti, nedostatke i strategije provedbe istraživački usmjerenog pristupa u nastavi Matematike. Cilj rada jest dati pregled dosadašnjih istraživanja o istraživački usmjerenoj nastavi i navesti primjere njezine provedbe u nastavi Matematike u nižim razredima osnovne škole.

Ključne riječi: istraživački usmjerena nastava, istraživački usmjereno učenje, Matematika, osnovna škola

ABSTRACT

Inquiry-based mathematics education is an approach to learning and teaching in which students behave like mathematicians in order to construct knowledge. This approach encourages students to ask questions, explore mathematical concepts and collaborate to find the answers. Inquiry-based mathematics teaching deepens the students' understanding of mathematics and improves their critical thinking, problem-solving and communication skills. The approach has a positive impact on students' attitudes and motivation towards mathematics, making it more interesting and relevant to their lives. The teacher has the role of facilitator, guiding the learning process and providing the environment for inquiry. Inquiry-based mathematics education requires careful planning to balance teacher guidance with independent student inquiry. With appropriate training and support, teachers can successfully implement this approach and create a dynamic and engaging learning environment that provides primary school students with the mathematical skills they need for lifelong learning.

This thesis explores the advantages, disadvantages and implementation strategies of an inquiry-based learning approach in Mathematics. The aim of the thesis is to give an overview of the previous research findings on inquiry-based learning and to give examples of how this approach can be implemented in the primary mathematics classroom.

Keywords: inquiry-based teaching, inquiry-based learning, Mathematics, primary school

SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. PREGLED POVIJESNOG RAZVOJA ISTRAŽIVAČKOG PRISTUPA	2
3. USPOREDBA SUVREMENE I TRADICIONALNE NASTAVE	5
4. ISTRAŽIVAČKI USMJERENO UČENJE	9
4.1. Obilježja istraživački usmjerenog učenja.....	11
4.2. Ciklusi istraživački usmjerenog učenja.....	14
4.2.1. Istraživački ciklus 5E	16
4.2.2. Istraživački ciklus 4D	17
5. ISTRAŽIVAČKI USMJERENA NASTAVA.....	19
5.1. Obilježja istraživački usmjerene nastave	21
5.2. Pristupi istraživački usmjerene nastave	23
5.2.1. Teorija didaktičkih situacija.....	23
5.2.2. Realistično matematičko obrazovanje	25
5.3. Razine istraživanja u istraživački usmjerenoj nastavi.....	27
5.4. Uloge učitelja u istraživački usmjerenoj nastavi.....	29
5.5. Uloge učenika u istraživački usmjerenoj nastavi	31
6. PROVEDBA ISTRAŽIVAČKI USMJERENE NASTAVE	33
6.1. Komponente istraživanja u istraživački usmjerenoj nastavi	34
6.1.1. Istraživački poticaj.....	37
6.1.2. Regulatorne kartice.....	39
6.2. Problem u istraživački usmjerenoj nastavi.....	41

6.3.	Obilježja problema u istraživački usmjerenoj nastavi	43
6.4.	Primjeri problema u istraživački usmjerenoj nastavi	46
6.4.1.	Oblik i prostor: Križanje papirnatih traka	48
6.4.2.	Brojevi: Istraživački poticaj o množenju.....	51
6.4.3.	Podatci, statistika i vjerojatnost: Abecedna statistika.....	53
7.	PROMICANJE ISTRAŽIVAČKI USMJERENE NASTAVE.....	58
7.1.	Prednosti istraživački usmjerene nastave.....	60
7.2.	Nedostaci istraživački usmjerene nastave	64
8.	ZAKLJUČAK.....	67
9.	LITERATURA	68

1. UVOD

U današnjem društvu ubrzanog razvoja teško je predvidjeti koje su kompetencije potrebne za snalaženje u njemu. Tehnološki napredak smanjio je potražnju za ljudima koji obavljaju rutinske poslove, a povećao potražnju za ljudima koji su kreativni, kritički promišljaju, rješavaju nerutinske probleme, surađuju i diskutiraju o rezultatima. Gdje bi učenici trebali steći ove kompetencije, ako ne u školi? Odgojno-obrazovni sustav trebao bi osposobiti učenike da pronađu stabilnost u promjenjivom svijetu. Mnogi nacionalni kurikuli preporučuju primjenu inovativnih metoda poučavanja koje zahtijevaju aktivniju ulogu učenika. Obrazovne reforme odmiču se od poučavanja temeljenog na prijenosu znanja i izoliranih vještina te mijenjaju uvriježene pretpostavke o konceptu učenja.

Istraživački usmjerena nastava matematike sredstvo je podrške učenicima u razvoju kompetencija 21. stoljeća u kojemu više nije dovoljno znati činjenice. Mnogi europski i drugi projekti promiču istraživački usmjerenu nastavu matematike kako bi učenike pripremili za dinamično društvo znanja. Cilj matematičkog obrazovanja nije samo usvajanje postupaka, već razvoj kreativnosti, kritičkog mišljenja, suradnje i komunikacije. Istraživački usmjerena nastava matematike, uz usmjeravanje učitelja i rad učenika sličnome kao kod matematičara, poboljšava motivaciju učenika te čini iskustvo matematike relevantnim, zanimljivim i primjenjivim za njihove živote. Učenici koji iskuse istraživački usmjerenu nastavu zauzimaju svoja mjesta u društvu kao istraživači, rješavatelji problema, mislioci i pojedinci samopouzdana u svojim područjima.

Struktura diplomskog rada sastoji se od uvodnog dijela definiranja koncepata i prikaza strukture istraživački usmjerene nastave. Središnji dio diplomskog rada fokusira se na provedbu istraživački usmjerene nastave, točnije na komponente istraživanja, probleme za rješavanje i njihove primjere u nastavi Matematike nižih razreda osnovne škole. Na završetku diplomskog rada dan je pregled istraživanja o prednostima i nedostacima istraživački usmjerene nastave.

2. PREGLED POVIJESNOG RAZVOJA ISTRAŽIVAČKOG PRISTUPA

Istraživački usmjereno učenje nije nova metoda i njezini začeci sežu do povijesnog prethodnika koji je živio u Antičkoj Grčkoj, Sokrata (Bogar, 2019) i njegove dijaloške metode. Sokratova metoda ispitivanja jest razgovor kojim je „ukazivao na nedostatke u znanju drugih, otkrivao proturječnosti i pronalazio pogreške u njihovim shvaćanjima i tvrdnjama, razdirao korijene prividnoga znanja i samoodbrane te tako kretao pravim putem k spoznavanju istine i moralnih načela“ (Zorić, 2008: 28). Postavljajući naizgled jednostavna pitanja poput: „Što je pravda?“, Sokrat je pokazao da su mnoge općeprihvaćene pretpostavke pogrešne, pa čak i nelogične. Sokratovo poučavanje nije tradicionalno jer ne uključuje prenošenje znanja od onog tko ima više znanja do onih koji posjeduju manje znanja – učitelj nije mudrac niti je učenik pasivni primatelj informacija (Friesen i Scott, 2013). Sokratskom metodom iskustvo u učionici postaje dijalog između učitelja i učenika u kojem su obje strane odgovorne za nastavljanje dijaloga kroz ispitivanje (Ross, 2003, prema Friesen i Scott, 2013). Postavljanjem pitanja učitelj i učenik razjašnjavaju osnovne pretpostavke koje podupiru tvrdnje o istini ili logične posljedice određene misli (Friesen i Scott, 2013).

Iako se istraživački duh unutar zapadne tradicije pojavio u Antičkoj Grčkoj, sam pojam seže do 13. stoljeća i latinske riječi *inquirere*, što znači „istraživati“. Istraživanje koje se ne temelji na ustaljenoj tradiciji ili praznovjerju, već na promatranju, eksperimentiranju i empirijskoj provjeri, dobilo je zamah u 16. stoljeću u Italiji. Renesansne osobe kao što su Galileo Galilei i Leonardo da Vinci postale su simbol potrage za znanjem koje se proširilo na ostatak Europe, potaknuto stvaranjem novih tehnologija poput mikroskopa, teleskopa, tiskarskog stroja itd. Istraživanje u većim razmjerima uslijedilo je tijekom europskog prosvjetiteljstva početkom 18. stoljeća (Friesen i Scott, 2013).

Pojava istraživački usmjerenog učenja najčešće se pripisuje američkom filozofu i obrazovnom reformatoru 20. stoljeća, Johnu Deweyu (Artigue i Blomhøj, 2013). Dewey (1938, prema Artigue i Blomhøj, 2013) je smatrao da je istraživanje osnova otkrića i

učenja. Proces istraživanja je međuigra poznatog i nepoznatog u situacijama u kojima se pojedinci suočavaju s izazovom. Istraživanje se može razviti zato što se nepoznatome može pristupiti s onime što je poznato jer podaci i izvori mogu sugerirati hipoteze i zaključke (Artigue i Blomhøj, 2013). Dewey (1944, prema Friesen i Scott, 2013) je, poput Sokrata, vjerovao da se istraživanje treba koristiti ne samo za stjecanje znanja i posebnih sklonosti nego i za učenje kako živjeti. Smatrao je kako je svrha obrazovanja ostvarenje punog potencijala učenika, jačanje demokracije i promicanje općeg dobra.

John Dewey (1990, prema Wells, 2011) tvrdio je da se obrazovanje mora temeljiti na iskustvu, što je bilo u suprotnosti s tradicionalnim učionicama onog vremena koje nisu bile opremljene za rad učenika konstruiranjem, stvaranjem i istraživanjem. Uočio je da su učionice postavljene za pasivne učenike i sate slušanja. Učenici dolaskom u školu moraju zatomiti svoje prirodne impulse poput kretanja, eksperimentiranja, samoizražavanja, promatranja, mašte, komunikacije, konstruiranja i istraživanja. Primijetio je učionice u kojima su odrasli nametali ideje s kojima učenici nisu imali iskustva, stoga se s njima nisu mogla poistovjetiti. Dewey (1938, prema Wells, 2011) je vidio obrazovni sustav koji djeluje izvan područja stvarnog životnog iskustva učenika i prirodnog ciklusa rasta.

Dewey (1938, prema Wells, 2011) je vjerovao da postoji nužan odnos između stvarnog iskustva i obrazovanja. Školski život je percipirao kao produžetak zajednice i društva u kojem dijete živi te se zalagao za školski sustav koji predstavlja stvarni život. Život koji je aktivno konstruiran, dopušta komunikaciju, suradnju te kurikulum temeljen na djetetovim interesima i iskustvima (Dewey, 1897, prema Wells, 2011). Dewey (1902, prema MERIA, 2019) je kritizirao tadašnji kurikulum, smatrajući kako se ne uklapa u učenička iskustva, pa čak i ometa učenje. Ako je cilj obrazovanja pružanje životnog iskustva učenicima, onda bi ono trebalo usmjeravati odabir aktivnosti učenja i iskustva koja odražavaju situacije iz stvarnog svijeta i poticati učenike da omogućuju konstrukciju značenja (McGregor, 2016). Učionica bi trebala biti sastavljena od materijala i empirijskih situacija s kojima se učenici susreću u svojim svakodnevnim životima izvan škole, a iskustvo bi trebalo biti što je moguće više „neškolsko“ (Dewey, 1997b, prema Fielding-Wells i sur., 2017).

Dewey je ovu viziju obrazovanja proveo u laboratorijskoj školi stvorenoj na Sveučilištu u Chicagu. Važnost koju je pridodao radu i praktičnim aktivnostima učinila je „učenje kroz rad“ sloganom koji se često koristi za sažimanje Deweyeve vizije. Deweyeva obrazovna filozofija u skladu je s trenutnim diskursom o matematičkom i prirodoslovnom obrazovanju u Europi i nije iznenađujuće da u filozofiji obrazovanja postoji ponovni interes za njegov rad (Artigue i Blomhøj, 2013). Dewey je u velikoj mjeri smatrao matematički diskurs načinom za sređivanje složenih podataka i sustavnu obradu ishoda procesa istraživanja (MERIA, 2019). Iako nije dao konkretne prijedloge za osmišljavanje istraživački usmjerene nastave matematike, znanstvenici matematičkog obrazovanja kasnije su razvili njegove ideje (MERIA, 2017).

John Dewey nije bio jedini intelektualac 20. stoljeća koji je preispitivao prikladnost školskog okruženja za učenike. Ruski psiholog Lav Vigotski tvrdio je da do istinskog učenja dolazi samo kada je dijete u interakciji s ljudima u svojoj okolini (Vygotsky, 1978, prema Wells, 2011). Vigotskog mnogi smatraju utemeljiteljem socijalnog konstruktivizma prema kojem je socijalna interakcija temelj procesa spoznaje (Jones i Brader-Araje, 2002, prema Wells, 2011). Dewey i Vigotski pridržavali su se uvjerenja koja su prihvaćala filozofiju konstruktivizma. Jedan oblik konstruktivističkog učenja jest istraživački usmjereno učenje koje ima vrlo dugu povijest u obliku projekta. Metoda projekta razvila se iz arhitektonskog i inženjerskog pokreta u Italiji tijekom 16. stoljeća te i danas postoji kao pedagoška praksa (Knoll, 1997, prema Wells, 2011).

3. USPOREDBA SUVREMENE I TRADICIONALNE NASTAVE

Diskusija o razumijevanju i pospješivanju procesa učenja odvijala se više puta kroz povijest (Khalaf i Mohammed Zin, 2018). Razvoj tehnologije i promjene u načinu života utjecali su i na razvoj modela učenja. Svi modeli ili pristupi učenju temelje se na teorijskim konceptima. Postoje tri dominantne teorije učenja: biheviorizam (proučavanje i analiza ljudskog ponašanja), kognitivizam (znanje konstruirano kognicijom) i konstruktivizam (konstruiranje znanja tijekom procesa učenja). Teorijske perspektive smatraju se temeljem za provedbu učinkovitog učenja u razredu. Od 1970-ih bilo je zahtjeva za reformom tradicionalnog pristupa učenja usmjerenog na učitelja u praktičan pristup usmjeren na učenika. Promjena je išla u prilog novom trendu konstruktivista koji su ukazivali na važnost prakse u učenju i koji su tvrdili da istraživanje može prevladati nedostatke tradicionalnog učenja (Barrow, 2006, prema Khalaf i Mohammed Zin, 2018).

U tradicionalnom poučavanju učitelj je dominantan izvor znanja u razredu: učitelji su pošiljatelji znanja, a učenici primatelji (Rashty, 1999, prema Khalaf i Mohammed Zin, 2018). Učenici nemaju priliku aktivno sudjelovati u procesu učenja, osim ako ih učitelj ne zatraži da riješe zadatak ili odgovore na pitanje. Znanje koje učitelji prezentiraju često je neupitno i učenici ga moraju prihvatiti (María i Luisa, 2016, prema Khalaf i Mohammed Zin, 2018). Dewey (1938, prema Friesen i Scott, 2013) je vjerovao da učitelj ne bi trebao jednostavno stajati ispred razreda i prenositi informacije koje učenici pasivno upijaju. Umjesto toga, učenici bi trebali biti aktivno uključeni u proces učenja i imati određeni stupanj kontrole nad onim što uče. Tradicionalni satovi usredotočuju se na bihevioralne utjecaje neposrednog konteksta i središnju ulogu učitelja. Istraživački usmjereno učenje bio je jedan od modela koji je doveo u pitanje koncepte tradicionalnog učenja (Khalaf i Mohammed Zin, 2018).

Tablica 1. Usporedba tradicionalne i istraživački usmjerene nastave

	TRADICIONALNA NASTAVA	ISTRAŽIVAČKI USMJERENA NASTAVA
Uloga učitelja	izvor znanja	usmjeravatelj i vodič
Uloga učenika	pasivni primatelj	samousmjerava učenje
Aktivnosti učenika	propisane učiteljem	usmjerene učenikom

(Anderson, 2002: 5, prema PRIMAS, 2011: 24)

Većina ljudi nema ispravnu sliku matematike i na nju gledaju kao na skup formula koji se primjenjuje na probleme na kraju poglavlja udžbenika. Razlog za ovu pogrešnu procjenu jest način na koji se matematika često podučava. Tradicionalni pristup matematici u školama sastoji se od propisivanja sadržaja, njegovog izlaganja te mjerenja učeničkog usvajanja tog sadržaja (Artigue i Baptist, 2012). Nastava matematike većinski se sastoji od ponavljanja demonstriranih tehnika koje se usavršavanju učestalim rješavanjem sličnih zadataka (MERIA, 2017). Od učenika se traži da rutinskim vježbanjem oponašaju učitelja, bez razumijevanja logike i postupaka koji stoje iza rješavanja (Schoenfeld, 1988, prema MERIA, 2017). Takav oblik nastave učenicima ne pruža iskustvo značajnih elemenata matematike poput rješavanja kompleksnih problema, stvaranja koherentnih struktura znanja, pretpostavljanja, dokazivanja, eksperimentiranja itd. (MERIA, 2017).

Pretjerano izlaganje tradicionalnoj praksi matematike u učionici može rezultirati time da učenici razviju naivna uvjerenja o prirodi matematike, ulozi koju matematika ima u društvu te načinu njezinog poučavanja i postizanja matematičke sposobnosti (Schoenfeld, 1992; McLeod, 1992; Di Martino i Zan, 2014, prema McGregor, 2016). Učenici ta naivna uvjerenja mogu ponijeti sa sobom u odrasle živote, što smanjuje vjerojatnost samouvjerene upotrebe matematike radi poboljšanja razumijevanja svijeta (Westwood, 2008, prema McGregor, 2016). Kako bi se kod učenika izgradio pozitivan stav prema matematici, važno je da učitelji razumiju kako način poučavanja i učenja matematike utječe na uvjerenja i stavove učenika (McGregor, 2016).

Nastava ne bi smjela biti ograničena na učitelja koji demonstrira metodu računanja, a koju učenici zatim ponavljaju bez razmišljanja (Artigue i Baptist, 2012). Učenje matematike je aktivan i konstruktivan proces usmjeren na cilj. Kako bi se taj cilj ostvario, mora se premostiti jaz između onoga što matematika jest i načina na koji se ovaj predmet često poučava u školi.

„Dajte čovjeku ribu i on će jesti taj dan;
naučite čovjeka pecati i on će jesti zauvijek.“

(Artigue i Baptist, 2012: 13)

Tradicionalan način podučavanja učenicima daje ribu, ne uči ih kako pecati. Obrazovne institucije trebaju temeljitu reorijentaciju i progresivniji pristup matematici. Učenici stječu dublje razumijevanje samo kada su aktivno uključeni u proces otkrivanja koncepata. Škola je više od mjesta poučavanja: škola je mjesto učenja (Artigue i Baptist, 2012).

Projekt PRIMAS (*Promoting inquiry-based learning in mathematics and science across Europe*) promicao je istraživački usmjereno učenje u matematici i prirodnim znanostima na području Europske unije. Po završetku projekta stvoren je priručnik *Inquiry-based learning in maths and science classes* u kojem je dana usporedba tradicionalnog i suvremenog nastavnog sata. Na tradicionalnom nastavnom satu učitelj je instruktor i davatelj znanja, a uloga učenika je pasivna zato što slijede upute, usvajaju činjenično znanje i vježbaju postupke kroz rutinske vježbe. Nasuprot tome, suvremeni nastavni sat naglašava aktivno sudjelovanje učenika: postavljanje pitanja, donošenje odluka, osmišljavanje eksperimenata, predviđanje, istraživanje alternativnih metoda, surađivanje itd. Učitelj ne stoji sa strane i ne „olakšava“ proces učenja, već se pridružuje učenicima, ispituje ih i provocira kako bi prosudili i obrazložili svoja razmišljanja (PRIMAS, 2013).

Tablica 2. Usporedba tradicionalnog i suvremenog nastavnog sata

TRADICIONALNI NASTAVNI SAT	SUVREMENI NASTAVNI SAT
Učitelj postavlja pitanja koja treba istražiti.	Učitelj razredu predstavlja poticaj i poziva učenike da promatraju, opisuju i postavljaju pitanja. On pobuđuje znatiželju.
Učitelj učenicima daje opremu koja će im trebati.	Učenici sami odabiru opremu koja im je potrebna.
Nema mjesta predviđanju i testiranju. Izbjegnete su moguće pogreške i miskoncepcije.	Diskutira se o predviđanjima koja se testiraju.
Zadatak je u potpunosti strukturiran prema udžbeniku. Učenici donose vrlo malo odluka. Uglavnom slijede upute.	Učenicima je dopušteno da rješavaju problem na koji god način žele. Na primjer, dopušteno im je koristiti metodu pokušaja i pogreške. Samostalno donose odluke.
Učitelj kaže učenicima da provjere točnost svojeg rada.	Učenici međusobno provjeravaju točnost rada.
Učitelj uglavnom daje upute i informacije te evaluira rad.	Učitelj izaziva, ispituje i provocira učenike kako bi razmišljali svojom glavom. Učenici prezentiraju i međusobno evaluiraju radove.

(PRIMAS, 2013: 7)

Prema Hodnik i Kreku (2022), prijenos znanja naspram samostalnog otkrivanja znanja jedna je od najčešćih dihotomija u nastavi u kojoj jedan pojam donosi negativne konotacije „tradicionalnog“ i „lošeg“. To je posljedica pojednostavljenog tumačenja konstruktivizma koji zanemaruje važne aspekte znanja kao socijalnog konstrukta i učenja kao konstrukcije unutarnjih struktura na temelju vanjskih te njihove stalne interakcije. Iz tog su razloga popularizirani trendovi grupnog učenja i učenja usmjerenog na učenike koji se predstavljaju kao alternative tradicionalnoj nastavi, iako pojam „tradicionalno“ nije jasno definiran i upotrebljava se ideološki. Ne treba smetnuti s uma da je znanje društveni konstrukt uspostavljen unutar znanstvenih disciplina i potvrđen kroz društvene procese. Iako je individualno učenje proces stjecanja nepoznatog znanja, samo znanje je već poznato i učenik ga ne može otkriti. Učitelj je posrednik društveno utemeljenog znanja. Svi oblici i metode rada u obrazovanju imaju za cilj prenošenje znanja, a frontalni rad samo je jedan od oblika njegovog prijenosa (Hodnik i Krek, 2022).

4. ISTRAŽIVAČKI USMJERENO UČENJE

Istraživački usmjerenno učenje temelji se na konstruktivističkoj paradigmi koju su promovirali John Dewey i drugi te koja pretpostavlja da se „znanje ne prima pasivno iz svijeta ili iz autoritativnih izvora, već ga konstruiraju pojedinci ili grupe koji daju smisao svojim iskustvenim svjetovima... Učenici su intelektualno generativne osobe (sa sposobnošću postavljanja pitanja, rješavanja problema te konstruiranja teorija i znanja), a ne prazne posude koje čekaju da postanu napunjene“ (Yilmaz, 2008: 162, prema Wells, 2011: 24). U literaturi ne postoji jasna definicija istraživački usmjerenog učenja jer nije usuglašeno koja bi vrsta konstruktivističke paradigme trebala biti temelj istraživački usmjerenog učenja. Način na koji učitelji definiraju istraživački usmjerenno učenje utječe na to kako ga provode i vide svoju ulogu u učionici (Wells, 2011).

Istraživački usmjerenno učenje je „široki krovni pojam za opisivanje pristupa koji su vođeni procesom istraživanja“ (Kahn i O'Rourke, 2005: 1, prema Wells, 2011: 24). Taj krovni pojam obuhvaća druge pojmove kao što su projektno učenje, problemsko učenje, suradničko učenje i učenje temeljeno na primjerima. Navedene metode počinju problemom i naglašavaju učenički proces stvaranja informacija te uključuju istraživanje u različitim oblicima (Bogar, 2019). Iako imaju malo drugačije definicije, ti su različiti pojmovi povezani načelima konstruktivističke paradigme (Wells, 2011). Pojam se upotrebljava na različite načine i u različitim kontekstima za tumačenje i opisivanje sličnih pristupa poučavanju i učenju kao što su praktični, problemski, projektni, deduktivni, induktivni (Blair, 2014; Engeln i sur., 2014, prema Calleja, 2016), usmjeren na učenika i dijaloški pristup (Anderson, 2002; Maaß, 2011, prema Bruder i Prescott, 2013).

Istraživački usmjerenno učenje (*eng. inquiry-based learning, IBL*) široko je prihvaćen termin koji se odnosi na način poučavanja i učenja matematike i prirodnih znanosti u kojem učenici postupaju poput matematičara i znanstvenika. Može se definirati kao proces otkrivanja novih uzročnih odnosa, pri čemu učenik formulira hipoteze i testira ih provođenjem eksperimenata i/ili promatranjem (Pedaste i sur., 2012, prema PRIMAS, 2013). Neki istraživači istraživački usmjerenno učenje definiraju kao pristup:

- koji učenicima omogućuje da budu aktivni tijekom cijelog procesa učenja postavljanjem pitanja, analiziranjem informacija i istraživanjem (Bogar, 2019);
- usmjeren na učenika koji koristi smislene zadatke kao što su slučajevi, projekti i istraživanja za situiranje učenja (Avsec i Kocijančič, 2016, prema Gholam, 2019);
- u kojem se učenici bave složenim problemima, tumače i pregovaraju o značenju problema, predviđaju relevantno matematičko znanje, identificiraju pravce rješenja, planiraju i provode istraživanja i iznose obranjiva rješenja potkrijepljena matematičkim dokazima (Fielding-Wells i sur., 2017);
- rješavanju problema koji uključuje primjenu vještina rješavanja problema (Pedaste i Sarapuu, 2006, prema PRIMAS, 2013);
- usmjeren na učenika s fokusom na istraživanje, kritičko razmišljanje i rješavanje problema (Gerhátová, 2021).

S druge strane, istraživački usmjereno učenje može se definirati i kao nastavna strategija:

- u kojoj učenici za konstrukciju znanja koriste metode i prakse profesionalne znanosti (Kelseman, 2003, prema Gerhátová, 2021);
- koja poučavanje i učenje usklađuje s učenikom i vještinama potrebnim za budući uspjeh (Marks, 2013, prema Gholam, 2019);
- u kojoj su učenici u središtu iskustva učenja i preuzimaju vlasništvo nad vlastitim učenjem postavljanjem, istraživanjem i odgovaranjem na pitanja (Caswell i LaBrie, 2017, prema Gholam, 2019).

Pojam istraživački usmjerenog učenja učestaliji je i logičniji na nastavi prirodnih znanosti nego na Matematici. Istraživanje se na nastavnim satovima prirodnih predmeta većinom temelji na osjetilima (Artigue i sur., 2012, prema MERIA, 2017). Matematičko znanje češće se temelji na teorijskoj osnovi nego na „eksperimentima“ induktivnog zaključivanja. Pojam istraživanja pruža izazov kada se preuzima iz prirodnih znanosti u kojima se hipoteza potvrđuje eksperimentom, a u matematici dokazom temeljenom na deduktivnom

zaključivanju (Artigue i Baptist, 2012, prema MERIA, 2017). Kao i u znanosti, matematičko istraživanje počinje problemom ili pitanjem, ali s manjim naglaskom na praktičnom eksperimentiranju (Rocard i sur., 2007, prema Calleja, 2016). Iako se istraživački usmjereno učenje koristi i za matematičko i za prirodoslovno obrazovanje, treba napomenuti da se u području matematičkog obrazovanja češće koristi termin problemsko učenje (*eng. problem-based learning, PBL*) (PRIMAS, 2013).

4.1. Obilježja istraživački usmjerenog učenja

„Pojam istraživački usmjerenog učenja odnosi se na učenje, odnosno poučavanje usmjereno na učenika u kojem učenici postavljaju pitanja, istražuju specifične situacije i razvijaju vlastite puteve do novih spoznaja“ (Drobnič Vidic, 2020: 189). Istraživački usmjereno učenje smatra se sustavom učenja koji podržava razvoj rješavanja problema i kritičkih vještina učenika (Maxwell i sur., 2015, prema Gholam, 2019). Karakterizira ga radoznalo, problemski usmjereno i kritičko mišljenje, autonomni i kreativni rad, intelektualno razumijevanje istraživačkog procesa te izravno sudjelovanje u istraživačkim projektima (Multrus, 2012, prema Pasternack, 2019). Saunders-Stewart i sur. (2012, prema Gholam, 2019) navode mnoge oblike istraživački usmjerenog učenja koji uključuju analizu, rješavanje problema, otkriće i kreativno razmišljanje.

Stručnjaci opisuju istraživački usmjereno učenje kao promišljen proces dijagnosticiranja problema, planiranja istraživanja, istraživanja pretpostavki, traženja informacija, konstruiranja modela, diskutiranja s kolegama i formiranja koherentnih argumenata (PRIMAS, 2013). Za istraživanje je važno rješavanje problema, matematizacija, istraživanje, analiza dokumenata i podataka, eksperimentiranje, objašnjavanje, dokazivanje i strukturiranje novih znanja (Artigue i Blomhøj, 2013; Suban, 2017, prema Drobnič Vidic, 2020). U području matematike istraživanje uključuje različite oblike aktivnosti, uključujući artikuliranje ili razradu pitanja, modeliranje, istraživanje, pretpostavljanje, testiranje, rasuđivanje, argumentiranje, definiranje, povezivanje, predstavljanje i komuniciranje (PRIMAS, 2013). Istraživačko učenje matematike potiče

učenike da postavljaju hipoteze i prave pogreške, po prirodi je komunikativno, fokusira se na proces, a ne na odgovor te omogućuje zajednički osjećaj svrhe unutar razreda (Dorier i Maass, 2014; Makar, 2012, prema McGregor, 2016).

Istraživački usmjereno učenje treba odražavati metode i procese moderne znanosti. Važna komponenta jest znanstveni eksperiment koji pomaže učenicima u razumijevanju biti istraživanja i stjecanju novih znanja (Gerhátová, 2021). Učenje se odvija u situacijama koje su učitelji stvorili s namjerom da učenicima omoguće promatranje stvarnih prirodnih fenomena, manipuliranje specifičnim predmetima, provedbu pokusa, diskutiranje i aktivno sudjelovanje u praktičnom rješavanju problema (Bagalová i Siváková, 2012, prema Gerhátová, 2021). Takve aktivnosti učenicima pružaju priliku da uoče obrasce, otkriju njihove temeljne uzroke te uče na načine koji su naizgled trajniji (Alfrieri i sur., 2011, prema Gholam, 2019). Od učenika se očekuje da surađuju kako bi otkrili rješenje problema te razvijali istraživačke vještine i sposobnost stvaranja kompromisa (Avsec i sur., 2014, prema Gholam, 2019).

Budući da se radi o pristupu učenja usmjerenom na učenika koji prioritizira kritičko razmišljanje, rješavanje problema, donošenje odluka i postavljanje pitanja, istraživački usmjereno učenje omogućuje učenicima razvijanje vještina potrebnih za život i nošenje s problemima s kojima se susreću (Branch i Solowan, 2003, prema Bogar, 2019). Istraživački usmjerenim učenjem učenici su uključeni u proces učenja i razumijevanja svijeta oko sebe (Gholam, 2019). Učenik je aktivno uključen u proces postavljanja pitanja i pronalaženja njihovih odgovora (Chu i sur., 2017, prema Gerhátová, 2021). U tom procesu učenici često provode samousmjereni, induktivni i deduktivni proces učenja te eksperimentiraju i istražuju odnose za skupove nezavisnih i zavisnih varijabli (Wilhelm i Beishuizen, 2003, prema PRIMAS, 2013).

Iako je istraživanje orijentirano na učenike, učitelji povremeno mogu usmjeravati učenike tijekom procesa učenja jer početnicima treba više uputa kako bi usavršili vještinu istraživanja (Zangori i sur., 2012, prema Gholam, 2019). Istraživački procesi često zahtijevaju rad u grupama, stoga učitelj mora preuzeti ulogu poticanja učenika na

postavljanje pitanja i upotrebu predznanja tijekom istraživanja, upravljanja radom grupa i diskusijom te podupiranja i usmjeravanja individualnog rada učenika (Drobnič Vidic, 2020). Učitelj pomaže učenicima uspostaviti veze između njihovih pronalazaka i matematičkih zakona (Maaß i Artigue, 2013, prema Drobnič Vidic, 2020). Uz ulogu učitelja kao vodiča, Drobnič Vidic (2020: 192) ističe i druge karakteristike istraživački usmjerenog učenja:

Tablica 3. Karakteristike istraživački usmjerenog učenja

KARAKTERISTIKE	ISTRAŽIVAČKI USMJERENO UČENJE
Središnja aktivnost	istraživanje postavljene situacije
Predmet aktivnosti	situacija (pojava), problem
Cilj	upoznavanje novog gradiva
Vodilja	učenje neposrednim promatranjem i istraživanjem nalik znanstvenom
Pioniri	Dewey, Schwab
Način učenja	usmjeren na učenika, istraživački ciklus 5E
Oblik rada	u jednoj grupi, u manjim grupama, individualno, u paru
Predznanje	nije nužno potrebno, novo znanje može se steći promatranjem
Uloga učitelja	usmjeravatelj, izvor pitanja, vodič
Uloga učenika	postavljaju pitanja, objašnjavaju, oblikuju hipoteze, interpretiraju, ispituju i odgovaraju
Razina obrazovanja	najprimjerenija za osnovnu školu
Najprimjerenije područje obrazovanja	za sva područja, posebice prirodne znanosti
Specifični ishodi	razumijevanje koncepata znanstvenog rada, upotreba znanja, poticanje kreativnosti

(Drobnič Vidic, 2020: 192)

Zajedničko za mnoge oblike istraživački usmjerenog učenja matematike dva su principa za koje su istraživanja pokazala da su u središtu većine provedbe pristupa (Lauren i sur.,

2011, prema Ernst i sur., 2017): duboki angažman bogatom matematikom te mogućnost suradnje u nekom obliku. Duboki angažman bogatom matematikom ukazuje na to da učenici aktivno i s namjerom rade na (za njih) izazovnim matematičkim problemima. Sami prave značajan dio razvoja matematičkih ideja koje su sofisticiranije od vježbi napamet na razini vještine. Najčešće ne znaju odgovor ili metodu unaprijed, a pitanja zahtijevaju hvatanje u koštac s matematičkim idejama prije nego li dođu do rješenja. Suradnja se najčešće pojavljuje u obliku strukturiranog grupnog rada. Učenicima se postavljaju pitanja i oni djeluju kao tim za promišljanje o matematičkim idejama. Učeničko razmišljanje ima koristi od verbalizacije misli jer učenici time uče kako učinkovito komunicirati matematiku u usmenom i pisanom obliku (Ernst i sur., 2017).

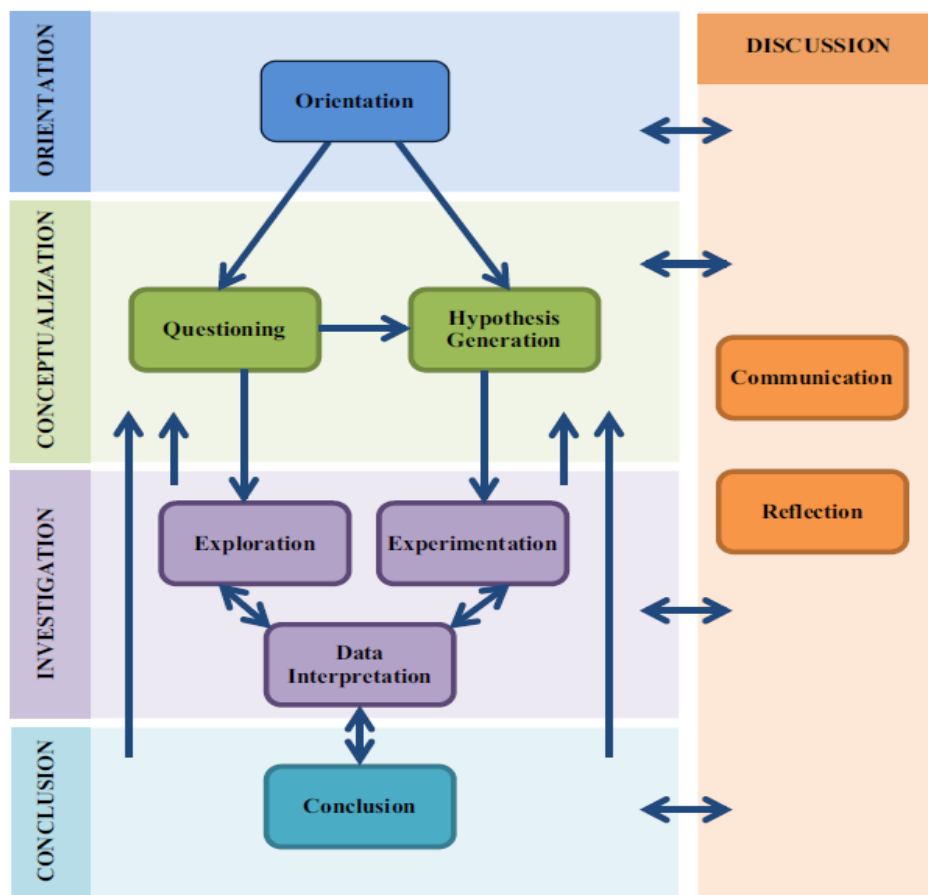
Načela istraživački usmjerenog učenja su suradnja, rješavanje problema, diskusije u malim grupama te učenicima zanimljivi zadaci koji maksimiziraju motivaciju pri rješavanju zadanog problema. Učenici surađujući analiziraju svoje ideje i teorije u partnerstvu s učiteljem. Konstruiraju vlastito učenje usmjeravanjem istraživanja i metodologije koju će upotrijebiti, uz preuzimanje odgovornosti za predstavljanje svojih pronalazaka (Kahn i O'Rourke, 2005, prema Wells, 2011). Novo znanje gradi se na postojećem znanju i životnom iskustvu učenika. Brown i sur. (1989, prema Wells, 2011) proveli su istraživanje situirane kognicije i otkrili da je učenje maksimizirano ako je kontekst za učenje dovoljno stvaran i autentičan da učenik može vidjeti kako se odnosi na stvarni svijet. Učenje je minimizirano kada kontekst u kojem se poučava nije sličan kontekstu u kojem će se koristiti (Thomas, 2000, prema Wells, 2011).

4.2. Ciklusi istraživački usmjerenog učenja

U istraživački usmjerenom učenju postoje razni obrazovni modeli koji obuhvaćaju organiziranu primjenu koraka, a osmišljavaju se uzimajući u obzir prirodu istraživanja, znanstvene informacije, znanstveni proces i svrhu učenja (Carin i Bass, 2001, prema Bogar, 2019). Istraživački usmjerenom učenje teži uključenju učenika u proces znanstvenog otkrivanja, a znanstveni proces sastoji se od manjih i povezanih cjelina koje usmjeravaju

učenike. Te cjeline nazivaju se istraživačkim fazama, a njihov skup veza tvori istraživački ciklus. Pedaste i sur. (2015) ekstrahirali su ključne komponente istraživački usmjerenog učenja i pružili okvir za organizaciju provedbe istraživačkog ciklusa koje su opisali razni istraživači. Predložen okvir istraživački usmjerenog učenja nastao je na temelju istraživanju literature i sastoji se od pet općih i devet podfaza. Istraživačke faze mogu se organizirati na različite načine koji se mogu slijediti pri osmišljavanju situacija učenja, a čine ih orijentacija, konceptualizacija, istraživanje, zaključivanje i diskusija (Pedaste i sur., 2015). Na *Slici 1* prikazan je okvir s istraživačkim fazama i podfazama:

Slika 1. Okvir istraživački usmjerenog učenja



(Pedaste i sur., 2015: 56)

4.2.1. Istraživački ciklus 5E

Istraživački ciklus 5E temelji se na kognitivnoj psihologiji, konstruktivističkoj teoriji učenja i praksi u STEM nastavi (Bybee i Landes, 1990, prema Norman, 2022). Ciklus se sastoji od pet faza prema kojima je dobio naziv: *engage*, *explore*, *explain*, *elaborate* i *evaluate*. Model može poslužiti tijekom provedbe STEM nastave te donosi veće prednosti za učeničke istraživačke sposobnosti u usporedbi s tradicionalnim modelima podučavanja (Northern, 2019; Bybee, 2009, prema Norman, 2022).

1. **Uključi (eng. *engage*).** Prva faza uključuje zadobivanje pozornosti učenika i poticanje njihove motivacije za učenje (Şensoy, 2009, prema Bogar 2019). Učitelj procjenjuje prethodno znanje učenika i/ili identificira moguće miskonceptije. Učitelj ne bi trebao definirati nove pojmove i davati obrazloženja učenicima, već ih angažirati postavljanjem pitanja ili aktivnostima poput demonstriranja, videozapisa, promatranja slika i sl. (Duran i Duran, 2004, prema Norman, 2022).
2. **Istraži (eng. *explore*).** Druga faza omogućuje praktične aktivnosti koje potiču upotrebu prethodnog znanja, stvaranje novih ideja i provođenje istraživanja (Bybee, 2009, prema Norman, 2022). Na temelju iskustva učenici daju zapažanja o problemu, generiraju hipoteze, prikupljaju i analiziraju podatke, provjeravaju valjanost hipoteza, surađuju i šire svoje perspektive dijeleći ideje (Şensoy, 2009, prema Bogar 2019).
3. **Objasni (eng. *explain*).** Treća faza temelji se na iskustvu učenika u prethodnoj fazi, a učitelj ima ulogu vodiča i usmjeravatelja (Duran i Duran, 2004, prema Norman, 2022). Učenici objašnjavaju svoje razumijevanje pojmova, a učitelj ispravlja miskonceptije učenika (Bybee, 2009, prema Norman, 2022). Učitelj postavlja pitanja i daje znanstvena objašnjenja učenicima kako bi se uvjerio da su u potpunosti razumjeli istraživanje, objašnjenja i predložene komentare za rješavanje problema (Şensoy, 2009, prema Bogar 2019).
4. **Razradi (eng. *elaborate*).** Četvrta faza učenike potiče da primijene svoje novo razumijevanje koncepata i učvrste nove vještine (Duran i Duran, 2004, prema Norman, 2022). Učenici izvode vježbe i primjenjuju naučeno u drugim situacijama

i disciplinama. Ciljevi aktivnosti ove faze su učiniti naučeno smislenijim, razvijati znanje i vještine te dublje učiti (Şensoy, 2009, prema Bogar 2019).

5. **Evaluiraj (eng. *evaluate*)**. Peta faza potiče učenike na evaluaciju razumijevanja i sposobnosti te pruža mogućnosti učiteljima za procjenu razine ostvarenosti odgojno-obrazovnih ciljeva (Bybee, 2009, prema Norman, 2022). Učitelji ispituju vještine koje su učenici razvili u procesu i sposobnost da primijene znanje u novim situacijama. Ne evaluira se ono što je zapamćeno, već ono što je apsorbirano (Şensoy, 2009, prema Bogar 2019).

4.2.2. Istraživački ciklus 4D

Allmond i sur. (2010, prema Makar, 2012) razvile su okvir za poučavanje matematičkog istraživanja koji se oslanja na matematičke koncepte i vještine za planiranje i provedbu. Njihovo istraživanje prepoznalo je izazove pružanja podrške učenicima u razvijanju relevantnih pitanja i planova za rješavanje i učiteljima u prijelazu na poučavanje matematičkog istraživanja (Allmond i Makar, 2010; Fielding-Wells, 2010; Makar, 2010, prema Makar, 2012). Istraživački ciklus u nastavku služi kao smjernica učiteljima za planiranje istraživački usmjerene nastave, a sastoji se od četiri faze prema kojima je dobio naziv: *discover*, *devise*, *develop* i *defend*.

1. **Otkrij (eng. *discover*)**. Prva faza uključuje predstavljanje problema, odnosno uranjanje učenika u kontekst i svrhu istraživanja razvijanjem istraživačkog pitanja i njegovim povezivanjem s osobnim znanjem učenika (Fielding-Wells i sur., 2014). Povezivanjem pitanja s problemom koji se može riješiti matematikom učenici počinju cijeniti važnost matematike i oslanjaju se na vlastito kontekstualno razumijevanje kako bi izgradili matematičke koncepte i strukture. Učenici uočavaju da matematika nije puko provjeravanje točnosti odgovora, već ljudska konstrukcija s prednostima i ograničenjima u njezinoj primjeni. Učitelji u ovoj fazi prepoznaju povezanost matematike stavljanjem naglaska na svrhu i kontekst iza problema i pomažu učenicima u otklanjanju nejasnoća (Makar, 2012).

2. **Osmisli (eng. *devise*).** Druga faza uključuje matematizaciju istraživačkog pitanja, razvijanje plana za rješavanje pitanja, predviđanje dokaza i potencijalnih zaključaka, planove prosudbe te početnu matematiku potrebnu za rješavanje problema istraživanja (Fielding-Wells i sur., 2014). Područje koje može biti novo učenicima jest potreba za razmatranjem dokaza koji su potrebni za njihovu analizu i opravdanje pronalazaka. Učitelji pružaju podršku učenicima u predočavanju kako se proces istraživanja razlikuje od rješavanja tradicionalnog matematičkog problema te u razvoju kulture u razredu koja pridaje važnost procesu razumijevanja, a ne samo točnom odgovoru (Makar, 2012).
3. **Razvij (eng. *develop*).** U trećoj fazi učenici provode i revidiraju plan, analiziraju podatke prema zaključku, produbljuju i formaliziraju matematičke ideje te evaluiraju dokaze potrebne za podupiranje zaključka u nastajanju (Fielding-Wells i sur., 2014). Učitelji mogu otkriti nedostatke u matematičkom razumijevanju učenika i eksplicitno podučiti potreban matematički koncept te podržati učenike u razvijanju strategija argumentacije zbog njihovog evoluirajućeg razumijevanja i napretka u rješavanju istraživačkog pitanja (Driver i sur., 2000, prema Makar, 2012). Učenici se kreću prema zaključku, što potiče razmatranje načina korištenja prikaza za prosuđivanje i priopćavanje svojih pronalazaka (Makar, 2012).
4. **Obrani (eng. *defend*).** U četvrtoj fazi učenici objedinjuju sav svoj rad kako bi stvorili i predstavili svoj zaključak (Makar, 2012): izvještavaju o pronalascima, razmatraju alternativne pristupe, stvaraju nova pitanja i prenose razumijevanje u novi kontekst (Fielding-Wells i sur., 2014). Dva su pedagoška fokusa učitelja u ovoj fazi. Proces povezivanja problema, svrhe, pitanja, dokaza i zaključka težak je za učenike pri priopćavanju otkrića (Allmond i Makar, 2010; Fielding-Wells, 2010, prema Makar, 2012) te zahtijevaju potporu učitelja. Također, za razliku od školskih zadataka, matematički problemi u autentičnom kontekstu nose određena ograničenja te je potrebno donijeti odluke kako bi se problem pojednostavio (Makar, 2012).

5. ISTRAŽIVAČKI USMJERENA NASTAVA

Nastava je organizirana interakcija učenja učenika i poučavanja učitelja, točnije „planiran, organiziran i svrhovit odgojno-obrazovni proces poučavanja, učenja i odgoja“ (Blažič i sur., 2003: 39, prema Drobnič Vidic, 2020: 186). Pojmovi „nastava“, „učenje“ ili „poučavanje“ koriste se ovisno o tome je li u središtu učenik i njegovo učenje ili učitelj i njegovo poučavanje. Kada su obje perspektive jednako vrijedne koristi se pojam „nastava“. U literaturi tako nalazimo na „istraživački usmjerenu nastavu“, kao i „istraživački usmjereno učenje“. Istraživački usmjerena nastava je dugotrajna tendencija učitelja da neka nova situacija potiče učenike da na temelju predznanja, radoznalosti i potpore postavljaju pitanja, odgovaraju i konstruktivistički dolaze do novih spoznaja (Drobnič Vidic, 2020).

Teorija konstruktivizma ističe kako učenik mora biti aktivan u nastavnom procesu i samostalnom aktivnošću doći do spoznaja. Svaki učenik svojim iskustvom konstruira znanje i ono se razlikuje od načina stjecanja znanja drugih učenika (Bjelanović Dijanić, 2010). Postoje modeli nastave koji se primjenjuju, pa čak i isprepliću: De Zan (2005, prema Bjelanović Dijanić, 2010), uz istraživački usmjerenu nastavu, navodi i modele problemske nastave, učenja putem rješavanja problema, stvaralačke nastave, projektne nastave, navođenja na istraživanje, učenja otkrivanjem itd. U istraživački usmjerenoj nastavi učitelj i učenici zajednički definiraju problem i znaju da njegovo rješenje postoji, no postupak nije zadan i učenici samostalno dolaze do rješenja. Takav način rada pruža diferencijaciju nastave jer učitelj svakom učeniku pomaže onoliko koliko je potrebno (Bjelanović Dijanić, 2010). De Zan (2005, prema Bjelanović Dijanić, 2010: 210) navodi stupnjeve kroz koje se u istraživački usmjerenoj nastavi prolazi tijekom usvajanja novih spoznaja:

1. stupanj motivacije – stvaranje problemske situacije;
2. stupanj teškoće – upoznavanje problema;
3. stupanj rješenja – postavljanje hipoteze i izrada plana istraživanja;
4. stupanj rada i izvođenja – izvođenje pokusa, mjerenja i uspoređivanja;

5. stupanj zadržavanja i vježbanja;
6. stupanj postignuća, provjeravanja i primjene naučenog.

„Paradigma zadatka“ u nastavi Matematike glavni je razlog zašto je učenici percipiraju kao beskorisnu i nezanimljivu. Istraživački usmjerena nastava matematike alternativni je pristup u kojem se zadaci zamjenjuju istraživačkim aktivnostima. Riječ „istraživanje“ upućuje na pokušaj samostalnog rješavanja problema koji ne slijedi unaprijed određenu metodu. Istraživački usmjerena nastava matematike učenicima omogućuje sudjelovanje u aktivnostima kroz koje prilagođavaju svoje postojeće ili stječu matematičko znanje (MERIA, 2017). Istraživački usmjerena nastava matematika jest „bilo koja nastavna aktivnost čiji je cilj da učenici sudjeluju u istraživačkim procesima u matematici, što znači da poimaju, ispituju i istražuju koncepte i pojmove tako što se ponašaju ili se uče ponašati kao istraživači matematičkog problema te na taj način stječu određeno matematičko znanje“ (MERIA, 2017: 15).

Na hrvatskom području istraživački usmjerenu nastavu definiralo je nekoliko autora. Jurić (1986, prema Perković Kirijan, 2016) govori o otkrivanju, definiranju i rješavanju problema u nastavi u kojoj su pojave i predmeti važnije od usmenog posredovanja, a rješavanje problema ima elemente znanstvenog pristupa. De Zan (1994, 2005, prema Perković Kirijan, 2016: 6) upućuje na poticanje učenika na „samostalno istraživanje, otkrivanje i dolaženje do spoznaja“ uz odgovarajuću pomoć učitelja, no otkrivanje u nastavi nije jednako znanstvenoj metodi. Letina (2013, prema Perković Kirijan, 2016) time podrazumijeva svrhovit proces učenja i poučavanja u kojem učenici istraživanjem i djelovanjem dolaze do spoznaja koje povezuju u smislenu cjelinu i koje im omogućavaju snalaženje u svakodnevicu. U hrvatskom jeziku važno je razlikovati pojmove istraživačke nastave i istraživački usmjerene nastave jer oni nisu istovjetni. Učitelji s učenicima mogu provoditi istraživačke aktivnosti poput pokusa, mjerenja i praćenja, a da pritom ne prolaze kroz sve etape istraživačke nastave. Istraživački usmjerena nastava sadrži samo neke elemente istraživanja, a istraživačka nastava sadrži istraživanja u nastavi (Perković Kirijan, 2016).

5.1. Obilježja istraživački usmjerene nastave

Fibonaccijev projekt odvijao se od 2010. do 2013. godine, a njegov cilj bio promicanje istraživački usmjerenog prirodoslovnog i matematičkog obrazovanja na području Europske unije. U okviru projekta sažeto je devet ključnih značajki istraživačke pedagogije koje su primjenjive na matematičko i prirodoslovno obrazovanje (Artigue i sur., 2012):

1. razvijanje kulture temeljene na problemu – biraju se zadaci i problemi koji dopuštaju individualne pristupe i različite načine rješavanja;
2. rad na znanstveni način – učenici djeluju poput znanstvenika danas ili nekoć;
3. učenje na greškama – pogreške su sastavni dio učenja, a ne samo prepreka, miskoncepcije su temelj za napredovanje prema znanstvenim pogledima;
4. osiguravanje osnovnih znanja – znanje može poslužiti kao osnova za razumijevanje i rješavanje problema tek kada elementi znanja nisu izolirani, već povezani;
5. kumulativno učenje – naučeno se povezuje sa stečenim znanjem i temama koje će se učiti u budućnosti;
6. uspostava korelacija – interdisciplinarno iskustvo obogaćuje učenje, npr. u korelaciji s umjetnošću mogu se proučavati estetske dimenzije matematike i prirodnih znanosti;
7. promicanje sudjelovanja djevojčica i dječaka – istraživanja su ukazala na postojanost različitih rodni obrazaca interesa te učitelj tu raznolikost može iskoristiti za stavljanje nastave u različite kontekste;
8. promicanje suradnje studenata – suradničko učenje rezultira kognitivnom dobiti jer upotreba jezika razvija verbalizaciju, argumentaciju i suočavanje s proturječnim mišljenjima;
9. autonomno učenje – pospješivanje samopouzdanja učenika, njihovog izražavanja i ukazivanje na njihove skrivene resurse predstavlja progresivno osvajanje autonomije.

Učenici u istraživački usmjerenj nastavi oponašaju znanstvenike postavljanjem pitanja, ispitivanjem slučajeva, traženjem uzoraka, dokazivanjem hipoteza itd. Takav način rada zahtijeva veliki angažman učenika, a ishod je njihovo dublje razumijevanje proučene problematike i dugotrajnije stečeno iskustvo kroz aktivnosti. Uz orijentaciju na rješavanje problema, karakteristika istraživački usmjerene nastave matematike jest promjena uloga učenika i učitelja. Učitelj ima ulogu vodiča i suradnika, a učenici preuzimaju odgovornost za svoje učenje. U tom odnosu podjela odgovornosti ne može biti u potpunosti eksplicitno dogovorena kako bi potencijal za učenje ostao sačuvan za učenika. Učitelj treba biti suzdržan u pomaganju i stvoriti atmosferu u kojoj učenik može samostalno istraživati i upregnuti vlastitu snagu (Milin Šipuš i sur., 2019; Ovčar i Loparić, 2008, prema Bjelanović Dijanić, 2010). Paradoks situacije je u tome što ako učitelj jasno kaže što želi od učenika, učenik to više ne može ostvariti (Milin Šipuš i sur., 2019).

Učitelj istraživački usmjerenu nastavu provodi dvama načinima: detaljnim planiranjem u pripremi za istraživanje te neplaniranjem tijekom istraživanja. U fazi planiranja učitelj potiče radoznalost učenika te predviđa pravce istraživanja unutar polja koji odgovaraju matematičkoj namjeri. Učitelj u svakom trenutku nastavnog sata provjerava odgovara li situacija pedagoškoj namjeri: ako se situacija, odnosno namjera učenika izražena kroz njihovu aktivnost ne poklapa s namjerom učitelja, učitelj mora reagirati (Zuckerman, 2007, prema Blair, 2020). Predviđanje pravaca istraživanja unaprijed od velike je pomoći, no učitelj mora donijeti puno odluka na licu mjesta tijekom diskusije (Bussi, 1998, prema Blair, 2020). Učitelj je suočen s izazovom kako pratiti rad učenika, reagirati na nepredvidljive situacije, orkestrirati prezentaciju rezultata i povezati rad učenika s odgojno-obrazovnim ishodima tog nastavnog sata (Milin Šipuš i sur., 2019).

Istraživački usmjerena nastava matematike ne mora se suprotstavljati drugim pristupima poučavanju kao što je tradicionalna nastava – moguće je kombinirati različite pristupe i uključiti istraživački usmjerenu nastavu povremeno (Dorier i Garcia, 2013, prema MERIA, 2019). Najbolje poučavanje često je balans između učiteljeve transmisije znanja i istraživanja učenika te integriranja ideja konstruktivističkih i biheviorističkih načela

(Godino i sur., 2015; Steele, 2005, prema MERIA, 2019). Istraživački usmjerena nastava može se provesti i u samo jednom dijelu sata te podrazumijeva samostalnu aktivnost učenika orijentiranu na rješavanje problema (Milin Šipuš i sur., 2019).

5.2. Pristupi istraživački usmjerene nastave

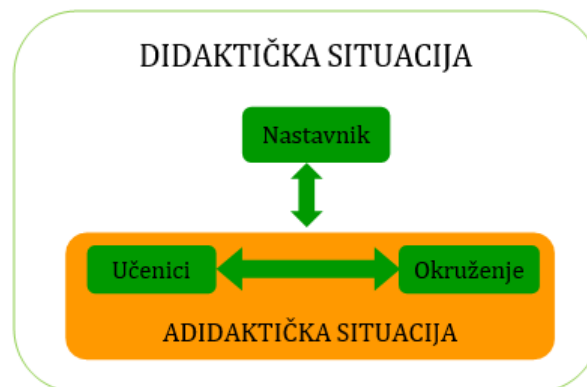
Iako je upotreba izraza istraživački usmjerene nastave relativno nova, njezine vrijednosti podudaraju se s teorijskim pristupima koji postoje i razvijaju se u području matematičkog obrazovanja već desetljećima. Najpoznatiji teorijski okviri koje su inicirali Freudenthal u Nizozemskoj i Brousseau u Francuskoj u kasnim šezdesetima danas su poznati pod nazivom Realistično matematičko obrazovanje i Teorija didaktičkih situacija (Freudenthal, 1973; Brousseau, 1997, prema Artigue i Baptist, 2012). Zajednička ideja u oba pristupa jest da se učenicima postavlja nerutinski problem koji rješavaju razvojem novog znanja. U TDS-u do razvoja znanja dolazi kroz adaptaciju prema miljeu nastavne situacije, a u RMO-u kada učenici matematiziraju fenomene kojima se problem bavi (Brousseau, 1997, prema MERIA, 2019). U svrhu poučavanja matematike u Europi su oblikovana središta koja ističu suvremene načine učenja matematike, a svaki od njih sadrži teorijska polazišta koja omogućuju provedbu istraživački usmjerenog učenja (Artigue i Blomhøj, 2013; Bloom, 2016, prema Drobnič Vidic, 2020).

5.2.1. Teorija didaktičkih situacija

Teoriju didaktičkih situacija (TDS) začeo je Guy Brousseau 1960-ih godina i podržava poučavanje u kojima su učenici graditelji matematičkog znanja. Pojedinci do institucionaliziranog znanja dolaze sintezom matematičkih aktivnosti, a do osobnog znanja interakcijom s matematičkim problemima. Istraživački usmjerena nastava matematike tvrdi da nastava učenicima treba omogućiti sudjelovanje u aktivnostima nalik onima koje provode istraživači (MERIA, 2017).

Učenik je u samostalnoj interakciji s didaktičkim okruženjem radi stjecanja novog znanja, bez dodatnih smjernica učitelja. Tako nastaju adidaktičke situacije u kojima učenici razvijaju osobno znanje, prilagođavajući ga problemu kroz istraživačke situacije i testiranje ideja. U didaktičkim situacijama učitelj ima direktnu interakciju s učenicima i pomaže u usvajanju specifičnog sadržaja, no adidaktičke situacije pružaju učenicima najveći potencijal za učenje. Učenici razvijaju osobno znanje koje zatim postaje institucionalizirano didaktičkim situacijama. Potencijal za učenje očituje se u dijalektici između didaktičkih i adidaktičkih situacija ili institucionaliziranog i osobnog znanja, kao što je vidljivo na *Slici 2*. To ne znači da učitelj nema aktivnu ulogu u adidaktičnim situacijama, već da se namjerno povlači iz interakcije kako bi učenik stekao znanje. Uloga učitelja jest osmisliti i odabrati situacije koje omogućavaju učenicima razvoj osobnog, a ujedno i institucionaliziranog znanja (MERIA, 2017).

Slika 2. Didaktičke situacije u dvostrukom međuodnosu



(MERIA, 2017: 34)

Teorija didaktičkih situacija stvara nastavne situacije znanih prepreka za matematičko znanje i poticanja učenika na razvoj i izgradnju novog matematičkog znanja. Nastavne situacije mogu se rasporediti u pet faza, a njihov redoslijed nije striktno određen. Prva faza primopredaje označava prijenos učitelja koji učenicima predaje okruženje uvođenjem

problema i pojašnjavanjem pravila za rješavanje. Učenici u fazi djelovanja samostalno rješavaju problem, koriste prethodno znanje i pokušavaju formulirati pretpostavke. Postupaju poput istraživača i njihovo je znanje rudimentarno, a pretpostavke pogrešne. U fazi formulacije predstavljaju ideje i hipoteze iz prethodne faze, diskutirajući o pokušajima s vršnjacima radi formaliziranja osobnog znanja. Učenici u fazi potvrđivanja testiraju hipoteze, a učitelj može provjeriti njihov rad bez ukazivanja na ispravnost. Poticajna okruženja i situacije učenicima ukazuju na valjanost njihovih odgovora i strategija. U fazi institucionalizacije osobno znanje postaje institucionalizirano. Učitelj prikuplja i sažima ideje te ih prezentira kao objedinjeni institucionalizirani sadržaj. Završna faza sinteza je stečenog znanja učenika kojim povezuju osobno znanje s institucionaliziranim znanjem razreda (MERIA, 2017).

5.2.2. Realistično matematičko obrazovanje

Realistično matematičko obrazovanje (RMO) teorija je učenja i poučavanja na čiji je razvoj uvelike utjecao nizozemski matematičar Hans Freudenthal u 20. st. Teorija se zalaže za organizaciju nastave matematike kao vođenog i ponovnog otkrivanja u kojem učenici prolaze kroz sličan proces kao znanstvenici koji su tu matematiku otkrili. Freudenthal (1991, prema Milin Šipuš i sur., 2019) smatra kako se riječ „otkrivanje“ odnosi na korak unutar procesa učenja, a „vođeno“ na nastavno okruženje. U uvodnoj se fazi predstavlja otvoren problem koji učenici mogu samostalno otkriti ili formulirati. U idućoj fazi horizontalne matematizacije problem se prevodi na matematički jezik kako bi se o njemu diskutiralo. Učenici opisuju specifičnu matematiku u općem kontekstu te stvaraju neformalni model vizualiziranjem i formuliranjem problema na različite načine. U fazi vertikalne matematizacije matematički model postaje apstraktniji i općenitiji predstavljanjem odnosa u obliku formula i kombiniranjem jednostavnijih modela. U zaključnoj fazi refleksije učenici analiziraju cjelokupan proces, integriraju ideje i razmjenjuju svoje zaključke (Milin Šipuš i sur., 2019).

Prema Freudenthalu (1977, prema Van den Heuvel-Panhuizen, 1996: 10), matematika mora biti „povezana sa stvarnošću, bliska djeci i relevantna za društvo kako bi bila od ljudske vrijednosti“. Aktivnosti učenja i matematički koncepti temelje se na onome što je za učenike smisleno i realistično. „Realistično“ u ovom kontekstu ne ukazuje na doslovno temeljenje na stvarnosti i svakodnevnom iskustvu jer je koncept realnosti drugačiji za svakog pojedinca (MERIA, 2017). Swan (1993, prema Van den Heuvel-Panhuizen, 1996) upućuje na to kako pokušaj osmišljavanja realističnih problema često rezultira „kamufliranjem“ običnih problema. Primjerice, pronalaženje kuta između nogu daske za glačanje nije relevantan problem za učenike. Međutim, relevantnost problema povećava se određivanjem mjesta za postavljanje graničnika na nogama radi postizanja optimalne visine za glačanje. Lesh i Lamon (1992b, prema Van den Heuvel-Panhuizen, 1996) ističu kako „realističnost“ nije primarni kriterij za osmišljavanje dobrih problema. Svrha rješavanja realističnih problema jest poticanje učenika na istraživanje matematičkih koncepata koji se temelje na proširenju njihovog iskustva i znanja.

Freudenthal (1968, prema Van den Heuvel-Panhuizen, 1996) tvrdi kako matematika nije zatvoreni sustav, već aktivnost i proces matematiziranja stvarnosti i matematike. U horizontalnoj matematizaciji učenici dolaze do matematičkih alata za rješavanje problema, a vertikalna matematizacija proces je reorganizacija i operacija unutar matematičkog sustava (Treffers, 1978, 1987a, prema Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Kurikul u kojem se učenici suočavaju s gotovom matematikom posljedica je pogrešne pretpostavke da se rezultati matematičkog razmišljanja mogu izravno prenijeti na učenike. Takav je pristup nehuman i ne funkcionira jer učenici koji su naučili matematiku na ovaj način ne mogu je primijeniti na druge situacije. Učenici bi se trebali tretirati kao aktivni sudionici odgojno-obrazovnog procesa u kojem principom ponovnog otkrivanja sami razvijaju matematičke alate i spoznaje (Freudenthal, 1973, prema van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Umjesto da učitelj počne s određenim apstrakcijama ili definicijama koje će učenici primjenjivati, treba početi s bogatim kontekstima koji se mogu matematizirati (Freudenthal, 1979b, 1986, prema Van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

5.3. Razine istraživanja u istraživački usmjerenom nastavi

Provedba istraživački usmjerenog učenja odvija se na različitim razinama te postoje njezine razne klasifikacije. Colburn (2004, prema Bogar, 2019) predlaže široko prihvaćenu klasifikaciju razina koja se sastoji od tri glavne podjele: strukturiranog, vođenog i otvorenog istraživanja. Učitelji obično započinju sa strukturiranim istraživanjem i postupno prelaze na pristupe koji su više usmjereni na učenika kako bi završili godinu otvorenim istraživanjem u kojem učenici samostalno biraju svoje teme i ishode (Gholam, 2019). U prijelazu sa strukturiranog na otvoreno istraživanje učenici postupno razvijaju svoje istraživačke vještine i autonomiju (Küçüker, 2008, prema Bogar, 2019). Ovisno o kojoj je vrsti istraživanja riječ, učitelj i učenik dijele različite uloge (Bogar, 2019: 96):

Tablica 4. Uloge učenika i učitelja prema vrstama istraživanja

	STRUKTURIRANO	VOĐENO	OTVORENO
Postavljanje pitanja	učitelj	učitelj	učenik
Planiranje procesa	učitelj	učenik	učenik
Dobivanje rezultata	učenik	učenik	učenik

(Bogar, 2019: 96)

Najveća opasnost za učitelja koji se prvi puta upušta u istraživački usmjerenom nastavi jest pokušaj provedbe otvorenog istraživanja. Nažalost, malo učenika imalo je priliku razviti samostalne vještine istraživanja formalnim obrazovanjem, stoga na otvoreno istraživanje mogu reagirati frustrirajuće jer „ne znaju što trebaju raditi“ ili razvijaju pristupe proturječne matematičkom rasuđivanju. Evaluacijom profila svojega razreda učitelj može procijeniti iskustvo i inicijativu učenika te odabrati razinu istraživanja koja je za njih najprikladnija. Otvoreno istraživanje krajnji je cilj istraživačkog putovanja i može proći puno mjeseci dok se ne dostigne.

Strukturirano istraživanje karakterizira učitelj koji određuje teme i vodi učenike korak po korak kroz proces učenja (Bogar, 2019). Učenicima zadaje problem ili pitanje te metode i

materijale potrebne za rješavanje (Kremer i Schlüter, 2006, prema Bruder i Prescott, 2013). Pružanjem potrebnih informacija i resursa, učitelj ograničava sudjelovanje učenika u razmišljanju i rješavanju problema. Ovaj je pristup usmjeren na učitelja i prikladan je za upravljanje razredom, no možda neće uključiti aktivno mentalno sudjelovanje učenika te ih potencijalno može demotivirati (Keller, 2001; Spaulding, 2001, prema Bogar, 2019). Učenici slijede usmjeravanje učitelja i cijeli je razred angažiran oko jednog istraživanja (Gholam, 2019).

U vođenom istraživanju učitelj učenicima zadaje probleme ili pitanja te potrebne materijale, a učenici moraju pronaći odgovarajuće strategije i metode rješavanja problema (Kremer i Schlüter, 2006, prema Bruder i Prescott, 2013). Tijekom rješavanja problema provjerava se sposobnost učenika da prethodno stečene vještine koriste u rješavanju novih problema, uz minimalno usmjeravanje učitelja (Wenning, 2005, prema Gerhátová i sur., 2021). Kako bi vođeno istraživanje bilo učinkovito, Cobb i McClain (2006, prema Fielding-Wells i sur., 2014) ističu kako se treba fokusirati na četiri ključna aspekta: probleme koji potiču autentičnu praksu, aktivnosti u razredu koje potiču diskusiju, upotrebu alata i prikaza u svrhu poticanja kritičkog razmišljanja te razgovor u razredu koji promiče produktivne norme učenja.

Otvoreno istraživanje predstavlja najvišu razinu istraživanja zbog najveće usmjerenosti na učenika. Učenici imaju slobodu određivanja što je važno, osmišljavanja vlastitih istraživanja i formuliranja vlastitih istraživačkih pitanja. Preuzimaju punu odgovornost za svoje učenje, aktivno se uključuju u proces istraživanja i razvijaju vještine znanstvenog istraživanja (Blanchard i sur., 2010; Keller, 2001; Llewellyn, 2002; Tatar, 2006, prema Bogar, 2019). Učenici trebaju pronaći probleme koje žele riješiti ili pitanja na koja žele odgovore, kao i odabrati metode i materijale koje bi željeli koristiti (Bruder i Prescott, 2013). Napori učitelja tijekom procesa usmjereni su na nadgledanje, usmjeravanje i pružanje podrške učenicima u stjecanju znanja (Kirschner i sur., 2006; Zion i sur., 2007, prema Gerhátová i sur., 2021).

5.4. Uloge učitelja u istraživački usmjerenj nastavi

U literaturi se ističe nekoliko uloga učitelja u učionici istraživački usmjerene nastave: odgovornost za usmjeravanje učeničkih pitanja, stvaranje okruženja istraživanja i interakcije, preuzimanje pozicije suučenja sa svojim učenicima te pružanje dovoljno vremena da istraživanje nastane (Wells, 2011). Wilhelm (2007, prema Wells, 2011) u svojoj knjizi predlaže strategije kao što su identificiranje problema, pomaganje učenicima da uspostave veze te praćenje i mentoriranje uspješnosti učenika. Također naglašava važnost suradnje između učenika, učitelja, sadržaja i autentičnih veza koje učenici stvaraju sa svijetom. Uloga učitelja jest odabrati odgovarajuće izazove za učenike, razjasniti svrhu aktivnosti, prepoznati i nadograđivati prethodno znanje učenika, poticati diskusiju o alternativnim metodama i shvaćanjima, ukloniti strah od neuspjeha, izazivati učenike kroz učinkovito postavljanje pitanja te učinkovito upravljati diskusijama u malim grupama i cijelim razredom (PRIMAS, 2013).

U svrhu planiranja istraživački usmjerene nastave učitelj izrađuje scenarije koji mu pomažu u razlikovanju faza rješavanja problema u kojima učenici koriste prethodno znanje, formuliraju i testiraju hipoteze te grade novo znanje. Učitelj ima ulogu suistraživača koji usmjerava učenike tijekom istraživanja, a ne izvora znanja koji pruža izravne odgovore (Artigue i Baptist, 2012, prema MERIA, 2017). Dewey je smatrao da je uloga učitelja tijekom istraživanja zadržati kontrolu nad ciljevima kako se učenici ne bi izgubili u procesu otkrivanja te procijeniti jesu li odabrane aktivnosti u skladu s postavljenim ciljevima. Fleksibilnost je ključna jer učitelj treba uvažiti razne smjerove aktivnosti, čak i one neočekivane. Dewey je naglasio da postizanje jednog cilja postavlja pozornicu za sljedeći, ističući stalnu i fluidnu prirodu učenja. Učitelja je zamišljao kao svjetionik koji osvjetljava djetetovo putovanje i usmjerava proces učenja. Poticao je suradnju između djece i odraslih kako bi međusobno iskoristili snage i postali sukreatori u zajedničkom pothvatu (Glassman i Whaley, 2000, prema Wells, 2011).

U istraživački usmjerenj nastavi učitelj promatra učenike i po potrebi ih mentorira, usmjeravajući ih da konstruiraju vlastito učenje. Učitelj vodi učenike u prijelazu s učenja

usmjerenog na udžbenike na formuliranje vlastitih istraživačkih pitanja. Razvija znanstvenu pismenost učenika te jača njihovu motivaciju i osjećaj odgovornosti. Pomaže učenicima u razvijanju učinkovitih strategija razmišljanja primjenjivih na njihova iskustva učenja te organizira okruženja koja učenicima omogućuju stjecanje praktičnih iskustava kroz aktivnosti. Učitelj uvažava prethodno znanje učenika i integrira ga s novim sadržajem prije početka nastave. Posjeduje sposobnost korištenja različitih tehnika ispitivanja i motivira učenike da provode daljnja istraživanja. Učenicima pruža priliku da se uključe u istraživanje unutar i izvan učionice, poput laboratorija ili školskih dvorišta (Crawford, 2000; Dickson, 2002; Duban, 2008; Eick i Reed, 2002; Lim, 2001; Llewellyn, 2002; Keys i Kennedy, 1999; NRC, 1996; Sönmez, 2008; Tseng i sur., 2013; Zion i Slezak, 2005; Wadsworth, 1978; Windschitl, 2003, prema Bogar, 2019).

U istraživački usmjerenoj nastavi učenici nisu prepušteni sebi, već učitelj ima ključnu ulogu podržavanja učenika u učenju kako samostalno raditi. Izazov poučavanja očituje se u pronalaženju ravnoteže između pružanja izazova i pomoći u učenju (Calleja, 2016). Intervencije učitelja su minimalne: on ne daje odgovore, nagovještaje odgovora ili prosudbe, već potiče i provocira učenike na kognitivne izazove. Učitelj daje učenicima prostor za razmišljanje, diskusiju, donošenje odluka i izlaganje argumenata i uvjerljivih rješenja, no ujedno skreće pozornost učenika na značajne ideje koje proizlaze iz njihovih prezentiranja (Foster, 2014; Hmelo-Silver i sur., 2007, prema Calleja, 2016). Dinamika u učionici zahtijeva učitelja koji uspostavlja ravnotežu između nastavnih pristupa i isprepliće ih. Istraživački usmjerena nastava predstavlja izazov za učitelja i učenike jer se obje strane susreću s nepoznatim. Učitelj ne može predvidjeti i pripremiti se za situacije koje učenici mogu donijeti. Pozicija učitelja je naizgled između dviju krajnosti: kurikula koji zahtijeva ostvarenje predviđenog matematičkog znanja te istraživački usmjerene nastave koja zahtijeva izgradnju znanja na prijedlozima učenika (Milin Šipuš i sur., 2019).

5.5. Uloge učenika u istraživački usmjerenoj nastavi

U istraživački usmjerenoj nastavi učenici imaju značajne uloge zbog uključenosti u proces i aktivnosti, uključujući planiranje, provedbu i evaluaciju vlastitog procesa učenja (Bogar, 2019). Goos (2004, prema McGregor, 2014) je uočila da nisu svi učenici uključeni u istraživački usmjerenu nastavu u učionici koja je bila pod nadzorom i pretpostavila kako bi to moglo biti povezano s njihovim uvjerenjima o prirodi matematike. Jedan od željenih ishoda reformiranog matematičkog obrazovanja jest poboljšanje afektivnog stava učenika prema matematici. Smatra se kako prethodna negativna ili pozitivna emocionalna iskustva oblikuju način na koji učenici pristupaju učenju. Učeničko ponašanje u učionici ishod je njihovog prošlog iskustva s učenjem matematike, a uvjerenja učenika prema matematici mogu se izvesti iz tog ponašanja (Di Martino i Zan, 2014, prema McGregor, 2014).

Afektivna uloga učenika očituje se u većoj spremnosti za preuzimanje rizika zato što učenici znaju da se njihove ideje cijene i uvažavaju (Savin-Baden i Major, 2004, prema Wells, 2011). Učenici koji uče vlastitim trudom i iskuse osjećaj uspjeha motivirani su za učenje te pronalaze prilike za samoizražavanje (Budak-Bayir, 2008; Llewellyn, 2002, prema Bogar, 2019). Osim stjecanja osnovnih znanja i vještina, učenici su odgovorni za vlastito učenje i stvaranje informacija smislenima za sebe. Učenici razlikuju jake i slabe strane svojeg učenja, počinju razmišljati metakognitivno, pažljivije planirati, odražavati vlastito učenje i procjenjivati vlastiti napredak (Budak-Bayir, 2008; Correiro i sur., 2008; Gallagher-Bolos i Smithenry, 2004; Keselman, 2003; Krajcik i sur., 1998; Lawson, 2010, prema Bogar, 2019).

Kognitivne uloge učenika mnogobrojne su i odnose se na proces korištenja vještina mišljenja na visokoj razini. Učenici zapažaju poput znanstvenika i koriste osmišljene istraživačke metode i odabrane materijale. Organiziraju istraživanje i prikupljaju podatke promatranjem, razvijaju teorije i testiraju ih. Učenici izražavaju svoje ideje izvješćima, ispituju situacije, uočavaju detalje i prepoznaju sličnosti i razlike situacija. Planiraju kako dokazati točnost svojih ideja, uspoređuju rezultate testiranih teorija s postavljenim pitanjem i pokušavaju objasniti rezultate. Učenici često izvode zaključke iz specifičnih

zapažanja i generaliziraju ih, klasificiraju znanje i odlučuju što je ispravno (Budak-Bayir, 2008; Correiro i sur., 2008; Martin-Hansen, 2005; Gallagher-Bolos i Smithenry, 2004; Lim, 2001; Lindquist, 2001; Llewellyn, 2002; Şenocak & Taşkesenligil, 2005, prema Bogar, 2019). Leonard i Penick (2009, prema Wells, 2011) također opisuju uloge koje učenici imaju u istraživački usmjerenom nastavi: uloge promatranja, postavljanja pitanja za istraživanje, predviđanja i nagađanja o uzroku i posljedici, planiranja načina testiranja svojih pitanja i prikupljanja podataka, organiziranja i prezentiranja prikupljenih podataka, analiziranja podataka te prezentiranja hipoteza o svojim rezultatima.

Socijalna uloga učenika sastoji se od podržavanja grupne interakcije i suradnje s vršnjacima u grupi (Budak-Bayir, 2008; Gallagher-Bolos i Smithenry, 2004; Lim, 2001, prema Bogar, 2019). Od učenika se u istraživački usmjerenom nastavi matematike očekuje da postavljaju pitanja, matematički razmišljaju i u grupama daju odgovore (Dorier i Maass, 2014, prema McGregor, 2014). Zbog otvorene prirode rada, učenici se potiču na predlaganje i objašnjavanje pitanja te na razvijanje zajedničkog razumijevanja i definiranja pojmova (Makar, 2012, prema McGregor, 2014). Ovo učenicima daje određenu kontrolu nad smjerom njihovog učenja (Boaler, 2008, prema McGregor, 2014). Učenici bi trebali biti zabrinuti za ishode grupe, a ne samo za individualne ishode, odnosno raditi u grupi i individualno. Uloga učenika jest dijeliti ideje kako bi dobili povratne informacije i postigli konsenzus o svojim rezultatima s drugima. Ako je potrebno, učenici prave izmjene u analizi podataka na temelju povratnih informacija (Leonard i Penick, 2009, prema Wells, 2011).

6. PROVEDBA ISTRAŽIVAČKI USMJERENE NASTAVE

Projekt MERIA (*Mathematics education – relevant, interesting and applicable*) promicao je istraživački usmjerenu nastavu matematike na području Europske unije. Jedan od produkata projektnog tima didaktički je priručnik *Praktični MERIA vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike* koji pruža teorijski okvir. Priručnik navodi da su za uspješnu provedbu istraživački usmjerene nastave matematike potrebni: dostupnost resursa istraživački usmjerene nastave matematike u obliku modula koji demonstriraju obradu matematičkih sadržaja sa značajkama istraživački usmjerene nastave matematike, usklađenost s uvjetima i ograničenjima institucije (npr. s prostorom, vremenom), zajednica učitelja za provedbu eksperimenata u razredu, poticanje profesionalnog razvoja učitelja i diskusija o iskustvima te dijeljenje profesionalnog znanja sa zajednicom (MERIA, 2017).

Prema Alberta Learning (2004), osmišljavanje istraživačkih aktivnosti uključuje nekoliko koraka za osiguravanje učinkovite provedbe. Ako postoji, učitelj se isprva konzultira s planom za istraživački usmjereno učenje na razini škole. Ako ne postoji takav plan, kreće od kurikula i odabire temu koja zanima njega i učenike. Učitelj surađuje s kolegom, timom učitelja ili knjižničarem kako bi razvio istraživački usmjerenu nastavnu jedinicu. Istražuje koji su dostupni resursi u školi i zajednici te koje teme zanimaju učenike i uključuju problem. Razmatra inkluzivnost, složenost teme te razinu usmjeravanja potrebnu učenicima. Učitelj bira temu i krajnji produkt istraživačke aktivnosti. Uspostavlja vremenske okvire i određene satove za istraživačke aktivnosti. Učitelj bira resurse u različitim formatima (tiskani, digitalni, multimedijalni) i na različitim razinama čitanja i pismenosti. Omogućava pristup resursima i dovoljno vremena da učenici pretražuju i upoznaju se s njima (Alberta Learning, 2004).

Prema Alberta Learning (2004), učitelj određuje koje će istraživačke vještine i vještine informacijske i komunikacijske tehnologije biti naglašene tijekom istraživanja. Procjenjuje kompetencije učenika u raznim istraživačkim vještinama i odlučuje koje vještine treba poučiti unaprijed. Učitelj planira praćenje i vrednovanje procesa istraživanja

i konačnih produkata, diferencirani pristup poučavanju, samovrednovanje, refleksiju na proces te evaluaciju i reviziju problema. Učitelj predstavlja istraživačku aktivnost kao integralni dio kurikula. Bilježi pitanja i probleme koji se pojavljuju tijekom nastavne jedinice za daljnje istraživanje. Tijekom i nakon istraživačke aktivnosti, učitelj bilježi strategije koje su bile najmanje i najviše učinkovite te rezultate koristi za poboljšanje idućeg planiranja (Alberta Learning, 2004).

6.1. Komponente istraživanja u istraživački usmjerenj nastavi

Učitelj bi trebao imati na umu sljedećih sedam komponenti modela matematičkog istraživanja u provedbi istraživački usmjerene nastave Matematike¹:

1. Orijentaciju na istraživački poticaj: ispitivanje, primjećivanje i čuđenje. Učenici zapažaju i raspituju se o zadanom istraživačkom poticaju, isprva individualno, zatim u paru diskutiraju o idejama. Svaki par postavlja pitanja ili komentare pred razredom, a učitelj u procesu izvlači relevantno znanje. Na *Slici 3* prikazani su primjeri pitanja za promicanje matematičkog mišljenja.
2. Uspostavu ciljeva i planiranje akcija regulatornim karticama. Učitelj se osvrće na pitanja i zapažanja te komentira moguće pravce istraživanja. Učenici u parovima sudjeluju u usmjeravanju istraživanja odabirom regulatorne kartice te opravdavaju svoj izbor u razrednoj diskusiji.
3. Istraživanje i zaključivanje. Učenici biraju između razdoblja istraživanja i generiranja više primjera, pronalaženja slučaja koji zadovoljava uvjet u istraživačkom poticaju ili testiranja pretpostavke. Na kraju istraživanja učenici mogu formirati generalizaciju induktivnim zaključivanjem.
4. Konstruiranje značenja. Postoji mogućnost da će učenici rješenje pronaći samo uz pomoć novog konceptualnog ili proceduralnog znanja, stoga učitelj odlučuje kako

¹Inquiry Maths (2023., 17. srpnja). An Inquiry Maths lesson. Pribavljeno 8.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home/an-inquiry-lesson>

intervenirati. Intervencija može dovesti do dijeljenja znanja ili njegovog zajedničkog konstruiranja u razredu.

5. **Obrazložavanje i dokazivanje.** Učenici obrazlažu istinitost pretpostavke ili dokazuju generalizaciju koju su prethodno napravili u istraživanju. Prosuđuju deduktivno formalnom algebrom ili analizom matematičke strukture.
6. **Predstavljanje rezultata.** Učitelj proziva učenike da predstave svoje pronalaskе tijekom istraživanja u pisanom ili drugom obliku. Učenici izvještavaju o pravcima istraživanja i predlažu nove ideje i pravce razredu.
7. **Refleksiju i evaluaciju.** Učitelj vodi učenike kroz refleksiju na tijek istraživanja i evaluaciju uspješnosti razreda u rješavanju pitanja postavljenih na početku sata.

U idućim potpoglavljima detaljnije će se razraditi prve dvije komponente koje uključuju nastavna sredstva istraživačkog poticaja i regulatornih kartica koja se mogu koristiti u modelu matematičkog istraživanja.

Slika 3. Pitanja u matematičkim učionicama. Adaptirano prema Watson, A., Mason, J. (1998).

Questions and Prompts for Mathematical Thinking, ATM.

<i>Exemplifying, Specialising</i>	<i>Completing, Deleting, Correcting</i>	<i>Comparing, Sorting, Organising</i>
<p>Give me one or more examples of ...</p> <hr/> <p>Describe, show, tell, find an example of ...</p> <hr/> <p>Is ... an example of ...?</p> <hr/> <p>Find a counter-example of / to ...</p> <hr/> <p>Are there any special examples of ...?</p>	<p>What must be added / removed / altered in order to allow / ensure / contradict ...?</p> <hr/> <p>What can be added / removed / altered without affecting ...?</p> <hr/> <p>Tell me what is wrong with ...</p> <hr/> <p>What needs to be changed so that ...?</p>	<p>What is the same and different about ...?</p> <hr/> <p>Sort or organise the following ... according to ...?</p> <hr/> <p>Is it or is it not ...?</p>
<i>Changing, Varying, Reversing, Altering</i>	<i>Generalising, Conjecturing</i>	<i>Explaining, Justifying, Verifying, Convincing, Refuting</i>
<p>Alter an aspect of something to see effect.</p> <hr/> <p>What if ...?</p> <hr/> <p>If this is the answer, what was the question?</p> <hr/> <p>Do ... in two (or more) ways. What is the quickest, easiest, ...?</p> <hr/> <p>Change ... in response to imposed constraints.</p>	<p>What happens in general?</p> <hr/> <p>Is it always, sometimes, never ...?</p> <hr/> <p>Describe all possible ... as succinctly as you can.</p> <hr/> <p>What can change and what has to stay the same so that ... is still true?</p>	<p>Explain / refute why ...</p> <hr/> <p>Convince me that ... / give a reason ... (using or not using ...)</p> <hr/> <p>How can we be sure that ...?</p> <hr/> <p>Tell me what is wrong with ...</p> <hr/> <p>Is it ever false that ...? (always true that ...)</p> <hr/> <p>Explain how ... is used in ...</p>

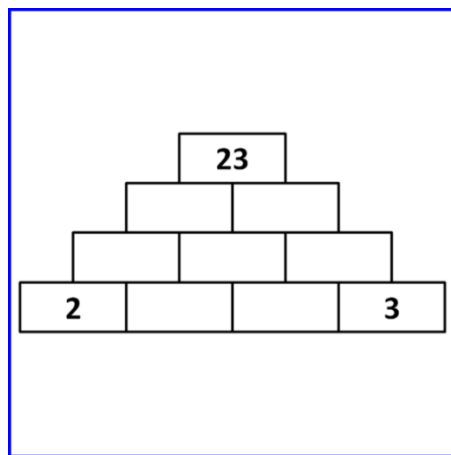
(Inquiry Maths, 2023)²

²Inquiry Maths (2023., 17. srpnja). An Inquiry Maths lesson. Pribavljeno 8.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home/an-inquiry-lesson>

6.1.1. Istraživački poticaj

U modelu matematičkog istraživanja nastavni sat započinje istraživačkim poticajem koji učenike potiče na pitanja i zapažanja (Blair, 2020). Istraživački poticaj skraćen je iskaz koji treba biti zanimljiv, poticati stvaranje pretpostavki i biti usmjeren na razvijanje matematičkog znanja kod učenika³. Ne mora krenuti od svakodnevnih iskustava učenika: poticaj za istraživanje može biti matematički iskaz, dijagram ili jednadžba (Blair, 2014). Nije jednostavno odabrati ili osmisliti istraživački poticaj jer ga jedan razred može smatrati zanimljivim, a drugome može biti nepristupačan. Poticaj treba imati svojstva koja učenici prepoznaju kako bi ih privukla na istraživanje, ali također mora sadržavati elemente koji ih navode na nagađanja (Blair, 2020). *Slika 4* prikazuje primjer istraživačkog poticaja o brojevima koji potiče istraživanje matematičkih obrazaca:

Slika 4. Istraživački poticaj o brojevima



(Inquiry Maths, 2022)⁴

³Inquiry Maths (2023., 27. travnja). Creating prompts. Pribavljeno 12.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home/creating-prompts>

⁴Inquiry Maths (2022., 22. kolovoza). Number prompts: Pyramid addition inquiry. Pribavljeno 12.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home/number-prompts/pyramid-addition-inquiry>

Idealan istraživački poticaj ne zastrašuje razred, već ulijeva povjerenje u sposobnost učenika za manipulaciju i promjenu poticaja. Dobar poticaj nudi više pravaca istraživanja, uključuje različita područja kurikula na konkretnoj i apstraktnoj razini te pruža mogućnosti za različite oblike mišljenja, uključujući indukciju (istraživanje i uočavanje) i dedukciju (logičko zaključivanje i dokazivanje). Učinkovit istraživački poticaj sadrži naizgled suprotne kvalitete u kreativnoj napetosti: poznato i nepoznato, dostupno i nedostupno, očito i intrigantno, fiksno i promjenjivo, zatvoreno i otvoreno. Unutarnji istraživački poticaji usredotočeni su na samu matematiku kao predmet istraživanja, dok vanjski istraživački poticaji proizlaze iz problema ili konteksta izvan discipline, koristeći matematiku kao alat za modeliranje.

Postavljanje istraživačkog poticaja ispod razine razumijevanja razreda možda neće potaknuti znatiželju, dok postavljanje previše iznad njihovog znanja može rezultirati nesudjelovanjem. Odabir prikladne polazne točke zahtijeva da učitelj dobro poznaje trenutnu razinu učenja učenika. Vigotskijev koncept zone proksimalnog razvoja predstavlja kolektivne sposobnosti razreda, uzimajući u obzir da učenici počinju na različitim razinama i imaju preklapajuće zone razvoja. Na primjer, učenici s nižim razinama konceptualnog razumijevanja mogu tražiti definicije ili upute, učenici koji poznaju termine mogu tražiti upute o metodi računanja, dok učenici s postojećim konceptualnim znanjem mogu postaviti pretpostavke. Učinkovit istraživački poticaj trebao bi odgovarati različitim razinama matematičke sofisticiranosti i razvoja učenika. Istraživanja koja se razvijaju iz istog istraživačkog poticaja mogu slijediti vrlo različite pravce: mogu trajati jedan nastavni sat ili više njih te mogu uključiti učenike u suradničko učenje na jednom pravcu istraživanja ili individualno na više njih⁵.

⁵Inquiry Maths (2023., 27. travnja). Creating prompts. Pribavljeno 12.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home/creating-prompts>

6.1.2. Regulatorne kartice

Druga komponenta u modelu matematičkog istraživanja odnosi se na razmatranje pravaca istraživanja koji se mogu razviti iz istraživačkog poticaja. U modelu istraživačke matematike pravci su povezani regulatornim karticama kao posrednikom između istraživačkog poticaja i aktivnosti učenika. Regulatorne kartice su nastavno sredstvo za strukturiranje razmišljanja učenika i osvještavanje procesa regulacije, a oprimjerene su na *Slici 5*. Učenici u razredu sudjeluju u usmjeravanju poticaja odabirom kartice na temelju svojeg razumijevanja. Učitelj odlučuje koje će kartice koristiti za poticaj, pritom pazeći da je svaka kartica povezana s matematičkom (vježbanje postupka, razvijanje dubljeg razumijevanja), socio-matematičkom (objašnjenje generalizacije) ili društvenom namjerom (suradničko istraživanje). Na taj način istraživanje usklađuje namjere učenika s namjerom učitelja (Blair, 2020).

Slika 5. Primjer dvadeset regulatornih kartica

Inquire with another student.	Share our ideas.	Decide on the aim of the inquiry.	Test different types of cases.
Discuss the inquiry.	Find more examples.	Extend patterns or relationships.	Make a conjecture.
Inquire on my own.	Practise a procedure.	Find connections.	Analyse the structure.
Ask the teacher or a student to explain.	Change the prompt.	Make a generalisation.	Decide if the prompt is always true.
Reflect on the inquiry so far.	Inquire in a group.	Explain a reason.	Prove a generalisation.

(Inquiry Maths, 2021)⁶

⁶Inquiry Maths (2021., 12. veljače). Regulatory cards. Pribavljeno 9.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home/Regulatory-cards>

Jedan od ciljeva istraživački usmjerene nastave matematike jest razviti sposobnost učenika za regulaciju učenja donošenjem vlastitih odluka i izbora. Učenike se potiče na aktivno sudjelovanje u određivanju smjera nastave i postavljanje ciljeva. Budući da su naviknuti oslanjati se na vodstvo učitelja, u početku bi učenicima ideja usmjeravanja vlastitog učenja mogla biti zbunjujuća. Međutim, istraživački usmjerenom nastavom učenici uče regulirati svoje učenje objašnjavanjem izbora regulatornih kartica svojim vršnjacima i upuštanjem u diskusije o različitim obrazloženjima. Učitelj igra ključnu ulogu u odbijanju nematematičkih sugestija i odlučivanju između legitimnih ideja. Navedeni su neki od preporučenih načina korištenja regulatornih kartica u učionici⁷:

- 1) Nakon diskusije o istraživačkom poticaju te generiranju pitanja i zapažanja, učitelj pita: „Što ćemo sljedeće učiniti?“ Učenici rade u parovima i odabiru karticu koja je u skladu s njihovim namjeranim pristupom. Fizičke kartice daju opipljiv objekt kojim učenici mogu manipulirati i pomoću njega komunicirati o zamislima.
- 2) Kartice su također prikazane na ploči kako bi ih svi mogli vidjeti. Dok učenici čitaju naglas svoje odabire kartica i daju obrazloženja, učitelj označava odgovarajuću karticu na ploči.
- 3) Učiteljev odgovor na odabranu karticu može varirati. Ako je odabir jasan i usklađen s većinom, učitelj se s njim slaže. Ako pitanja otkrivaju nedostatak proceduralnog znanja, učitelj može dati upute ili zamoliti učenika da objasni. Ako je mišljenje razreda podijeljeno na temelju različitih izbora kartica, učitelj ih prema tome može podijeliti u grupe i svakoj dodijeliti vrijeme za izvješćivanje. Ako učenici primarno biraju kartice koje se odnose na proces istraživanja, učitelj mora odlučiti o njegovom pravcu. Ovaj proces donošenja odluka trebao bi uključivati javnu diskusiju koja razmatra pitanja i zapažanja učenika. Učitelj treba upoznati učenike s vrstama kartica i zatražiti učenike da ubuduće odaberu dvije kartice: jednu o tome kako istraživati i drugu za idući korak. Ako učenici odaberu mnoštvo

⁷Inquiry Maths (2021., 12. veljače). Regulatory cards. Pribavljeno 9.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home/Regulatory-cards>

različitih kartica, učitelj može predložiti slijed radnji koji uključuje što je moguće više izbora ili dopustiti pojedincima da slijede vlastiti pravac, osobito ako je razred iskusan u istraživanju.

- 4) Kartice se mogu koristiti više puta tijekom istraživanja, posebice ako obuhvaća više nastavnih satova. Korištenje kartica na kraju jednog može utjecati na strukturu idućeg nastavnog sata.
- 5) Učenici stjecanjem iskustva u istraživanju mogu nadodati kartice kako bi stvorili svoj jedinstveni set. Učitelj također može ukloniti određene kartice ako su ih učenici skloni automatski odabrati, bez pažljivog razmatranja specifične situacije.

Odabir regulatornih kartica trebao bi biti usklađen s profilom razreda i ciljevima istraživanja. Za istraživače početnike prikladnije su društvene kartice koje naglašavaju istraživački proces. Učenicima koji imaju teškoće u razvoju istraživačkih pravaca može pomoći set kartica s induktivnim regulatornim izjavama. U nastavu se mogu uključiti i deduktivne kartice koje naglašavaju matematička svojstva i strukture kako bi se poticalo objašnjavanje i dokazivanje. Povećanjem iskustva učenika može se povećati i količina kartica, počevši od manjeg seta i napredujući do većeg seta. Konačni cilj je da učenici postanu neovisni i samousmjereni istraživači i da im regulatorne kartice prestanu biti potrebne. Znakovi neovisnosti učenika očituju se u biranju različitih kartica na temelju prethodnog učenja, biranju više kartica koje kombiniraju aktivnosti i pristupe, stvaranju vlastitih kartica i davanju prijedloga za strukturiranje nastavnog sata.

6.2. Problem u istraživački usmjerenoj nastavi

Dewey (1938, prema MERIA, 2017) je smatrao da je proces učenja interakcija učenika s problemima, odnosno u kojima prethodno i već poznato znanje učenika pomaže u istraživanju nepoznatih situacija. Problem u istraživački usmjerenoj nastavi matematike ima veći značaj od pukog zadatka ili vježbe jer zbog otvorenosti potiče učenike na eksperimentiranje, teoriziranje o rješenjima, komuniciranje o hipotezama i strategijama

rješavanja te postavljanje pitanja za razmatranje. Postavljanje pitanja pokreće istraživački proces i potiče učenike na traženje odgovora na svoja pitanja i pretpostavke. Eksperimentiranjem i novim načinima kombiniranja znanja učenici dolaze do spoznaja koje procjenjuju daljnjim eksperimentima (MERIA, 2017).

George Pólya definira rješavanje problema kao „aktivnost kojom se matematičari bave dok istražuju“ (Artigue i Blomhøj, 2013, prema MERIA, 2017: 9). Za rješavanje su potrebne heurističke kompetencije i strategije za rješavanje nerutinskih problema. Schoenfeld (1992, prema MERIA, 2017) tvrdi da se moraju razlikovati pojmovi problema i zadataka: zadaci se rješavaju poznatim strategijama, a problemi kombiniranjem i razvijanjem metoda i znanja na nov način. Problem može glasiti: „Zamislimo trokut s duljinama stranica a , b i c . Ako se sve stranice jednako uvećaju, za koliko će površina uvećanog trokuta biti veća u odnosu na prvotni trokut (MERIA, 2017: 8)?“ Učenici do rješenja dolaze upotrebom znanja matematičkog sadržaja (površina trokuta), no ujedno i razvijaju znanje o sličnim trokutima i kombiniraju poznato znanje na nov način (MERIA, 2017).

Učenici na navedeni problem mogu primijeniti različite strategije rješavanja na temelju prethodnog znanja o trokutima, mjerama stranica, kutovima, površinama, sličnim trokutima i trigonometrijskim odnosima. Primjerice, učenici mogu istraživati ideju uvećanja trokuta i eksperimentirati s uvećanjem; razmatrati posebne slučajeve (npr. pravokutne trokute) i algebrailčki osmisliti pretpostavke o povećanju površine; uspoređivati različite strategije rješavanja, diskutirati o njima i testirati ih na novim trokutima. Prednost istraživački usmjerene nastave matematike je u tome što učenici za stjecanje znanja koriste različite ideje koje uspoređuju i povezuju. Učenici uče više od samog izračuna površine trokuta: uče kako kombinirati novo znanje s drugim relevantnim područjima kako bi rješavali otvorene probleme (MERIA, 2017).

Autori Bosch i Winsløw (2016, prema MERIA, 2017) smatraju da rješavanje problema donosi više od pokušaja da se dobivena rješenja razumiju. Formulacija problema ključna je na nastavi Matematike jer potiče razvoj heuristike i matematičkog mišljenja, poboljšava

vještine rješavanja i samopouzdanje te produbljuje razumijevanje matematičkih koncepata (Ellerton, 2013; Singer i sur., 2013, prema MERIA, 2017). Proces rješavanja problema potiče matematičku kreativnost i znatiželju te zahtijeva upotrebu prethodnog znanja, intuicije, nedefiniranih shvaćanja i hipoteza radi istraživanja i razumijevanja problema. Karakteristika problema jest otvorenost koja potiče učenike na razmišljanje i postavljanje pitanja o relevantnom znanju. Takvi problemi mogu proizići iz matematičkih pitanja ili biti nadahnuti iskustvima ili radnjama iz stvarnog svijeta (MERIA, 2017).

6.3. Obilježja problema u istraživački usmjerenoj nastavi

Problemi koje učenici rješavaju u matematici često nisu odraz vještina i razumijevanja potrebnih za rješavanje složenih problema s kojima se svakodnevno susreću. Većina problema u školskoj matematici je strukturirana, što znači da je u njima problem jasno definiran i da učenici imaju ograničen broj pravaca kojima dolaze do rješenja (Makar, 2012). Strukturiran problem je onaj u kojem postoji sustavan način da se odluči kada je predloženo rješenje prihvatljivo (Minsky, 1961, prema Fielding-Wells i sur., 2017). Vjerojatno je da su početno i krajnje stanje jasno definirani, čak i ako metode dolaska do rješenja variraju (Reitman, 1965, prema Fielding-Wells i sur., 2017). Učenicima se često pokazuju eksplicitne metode rješavanja problema prije pokušaja samostalnog rješavanja (De Corte i sur., 2008; Makar, 2012; Schoenfeld, 1992, prema McGregor, 2016). Navedeno dovodi do nedostatka relacijskog razumijevanja i kod učenika naglašava razvoj vještina i instrumentalnog razumijevanja matematike (Boaler, 1998; Skemp, 1976, prema McGregor, 2016).

U svojem istraživanju o devet australskih udžbenika za osmi razred, Stacey i Vincent (2009, prema Fielding-Wells i sur., 2014) ustanovili su da je u većini udžbenika svrha zaključivanja i objašnjenja bila priprema učenika na vježbanje zadataka, a ne na razvijanje matematike kao alata za razmišljanje: samo jedna trećina udžbenika uključivala je učenike u proces aktivnog zaključivanja. Tradicionalni problemi u udžbenicima ne podupiru istraživački usmjerenu nastavu matematike jer pružaju količinu informacija dostatnu za

rješavanje, što učenike ne navodi na promišljanje o postupku rješavanja. U strukturiranom problemu navedene su egzaktno informacije potrebne za njegovo rješavanje. Strukturirani problem traži učenike da upotrijebe formule, a kontekst je zanemariv i ne podupire primjenu matematike izvan učionice (MERIA, 2017).

Nasuprot tome, istraživačka matematika jest proces rješavanja nestrukturiranih problema koji se oslanjaju na matematiku u procesu rješavanja (Makar, 2012: 2). U nestrukturiranim su problemima početni uvjeti i/ili ciljevi problema višeznačni ili imaju veliki broj otvorenih ograničenja koja zahtijevaju pregovore (Reitman 1965, prema Fielding-Wells i sur., 2014). Rješenje nestrukturiranog problema obično nije točno ili netočno, već zahtijeva da njegov rješavatelj opravda svoj zaključak i postupak kojim je došao do njega (Makar, 2012). Rješavanjem takvih problema u matematici učenici razvijaju vještine (npr. pregovaranje o značenju problema, odabir metoda rješavanja problema, toleranciju na moguće metode rješenja) i grade uvjerenja o vrijednosti matematike (McGregor, 2016). Na učenicima je dodatna odgovornost da definiraju problem, evaluiraju napredak svojeg rješenja i naprave preinake njegovim razvojem (Reitman, 1965, prema Fielding-Wells i sur., 2017).

Simon (1973, prema Fielding-Wells i sur., 2017) je okarakterizirao nestrukturirane probleme kao one koji nemaju definitivan kriterij koji bi omogućio prosuđivanje rješenja, u kojima problemski prostor nije definiran na smislen način i u kojima se na ograničenja može utjecati alternativama. Učenici rješavanjem problema uspostavljaju obrasce iz naizgled nepovezanih aspekata problema i povezuju učenje sa stvarnim situacijama u životu (Kitchner, 1983, prema McGregor, 2016). Jonassen (1997, prema McGregor, 2016) je identificirao 12 tipova nestrukturiranih znanstvenih problema koji se mogu primijeniti i na matematiku, a neki od njih su problemi koji: uključuju višestruke kriterije za evaluaciju rješenja; uzrokuju nesigurnost oko toga koji su koncepti, pravila i principi potrebni za rješenje; imaju elemente koji nisu sa sigurnošću poznati, nejasne ciljeve i ograničenja ili nedostatak konsenzusa o odgovarajućem rješenju. Učenici trebaju izraziti osobna mišljenja ili uvjerenja o problemu i braniti ih, što nestrukturirane probleme čini

jedinstvenim interpersonalnim aktivnostima. Primjer transformacije strukturiranog u nestrukturirani problem prikazan je na *Slici 6* (MERIA, 2017):

Slika 6. Usporedba strukturiranog i nestrukturiranog problema

Strukturirana verzija		Nestrukturirana verzija										
<p>Pacijent je bolestan. Liječnik mu propiše lijek te mu savjetuje da uzima dnevnu dozu od 1500 mg. Nakon uzimanja doze 25 % lijeka u prosjeku se izlučuje iz tijela tijekom dana. Preostala količina lijeka ostaje u krvotoku pacijenta.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Koliko mg lijeka ostaje u krvotoku pacijenta nakon jednoga dana? • Dovršite tablicu. <table border="1"> <thead> <tr> <th>Dan</th> <th>Mg lijeka u krvotoku</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1125</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> • Objasnite zašto možete izračunati količinu lijeka za sljedeći dan pomoću formule: $\text{nova_količina} = (\text{stara_količina} + 1500) * 0,75$ • Nakon koliko će dana pacijent u krvotoku imati više od 4 g lijeka? A nakon koliko dana 5 g? • Koja je najveća moguća količina lijeka? 		Dan	Mg lijeka u krvotoku	0	0	1	1125	2		3		<p>Pacijent je bolestan. Liječnik mu propiše lijek te mu savjetuje da uzima dnevnu dozu od 1500 mg. Nakon uzimanja doze 25 % lijeka u prosjeku se izlučuje iz tijela tijekom dana. Preostala količina lijeka ostaje u krvotoku pacijenta.</p> <p>Istraga</p> <ul style="list-style-type: none"> • Istražite računanjem na koji se način mijenja količina lijeka (u mg) ako netko lijek krene uzimati u dnevnoj dozi od 1500 mg i to, primjerice, tri puta dnevno po 500 mg. • Jesu li posljedice dosta tako dramatične ako se preskoči jedan dan i/ili uzme dvostruka doza? • Može li se postići svaka količina lijeka u krvotoku? Objasnite vaš odgovor. <p>Proizvod</p> <p>Osmislite letak za pacijente koji će sadržavati odgovore na gore navedena pitanja. Uključite graf i/ili tablice kako biste ilustrirali povećanje količine lijeka tijekom nekoliko dana.</p>
Dan	Mg lijeka u krvotoku											
0	0											
1	1125											
2												
3												

(Doorman i sur., 2016: 25, prema MERIA, 2017: 18)

Nestrukturirani problemi učenicima pružaju mogućnost istraživanja, kritičkog promišljanja, suradnje i diskusije o rezultatima. Međutim, postoji mogućnost da učenici neće znati što trebaju raditi, stoga je uloga učitelja usmjeravati ih kako se ne bi osjećali izgubljeno. U tome pomaže osmišljavanje strukturiranog plana nastavnog sata koji

usmjerava učenike tijekom istraživanja. Učenike se u istraživanje može uključiti na način da se problem raspodijeli na manje dijelove. Učitelji mogu pokazati uvodni tekst i ispitati učenike što je glavni problem, koje su informacije potrebne za rješavanje problema, koje se strategije mogu upotrijebiti itd. Problemi iz udžbenika mogu se transformirati tako da se uzmu sva potpitanja, izmiješa njihov redoslijed i zamoli učenike da poredaju pitanja kao što su izvorno u udžbeniku (MERIA, 2017).

6.4. Primjeri problema u istraživački usmjerenoj nastavi

Istraživački usmjerena nastava učenike potiče na aktivno sudjelovanje i pružanje zanimljivih odgovora na probleme. Učitelji trebaju odabrati prikladne probleme koji nadilaze jednostavno prisjećanje osnovnih znanja i rutinske postupke koji se nalaze u udžbenicima. Učitelji bi trebali predlagati bogate i autentične situacije s pitanjima koja su pristupačna, ali i izazovna za učenike. Pedagogije trebaju prijeći na suradničku orijentaciju u kojoj učenici zajedno rade na međusobno povezanim i izazovnim problemima (PRIMAS, 2013). Sljedeći izvori dijele zajednički cilj promicanja istraživački usmjerenog učenja matematike i prirodnih znanosti te nude različite resurse poput nastavnih materijala, problema i istraživačkih poticaja koji potiču učitelje na razvijanje i provedbu istraživački usmjerene nastave:

- 1) PRIMAS (*Promoting inquiry-based learning in mathematics and science across Europe*) je projekt koji je promicao prakticiranje istraživački usmjerenog učenja u matematici i prirodnim znanostima diljem Europe. Brošura *Inquiry-based learning in maths and science classes*, nastala po završetku projekta, sadrži opise inspirirajućih istraživački usmjerenih nastavnih satova Matematike i prirodnih znanosti provedenih u osnovnim i srednjim školama, a mogu se pronaći na mrežnoj stranici PRIMAS-a. Brošura učiteljima pruža ideje, poticaje i motivaciju za razvijanje i provedbu istraživačko usmjerene nastave i problema u učionicama (PRIMAS, 2013).

- 2) *Inquiry Maths*⁸ mrežna je stranica koja potiče učenike na reguliranje vlastite aktivnosti istraživanjem istraživačkih poticaja (jednadžbi, izjava, dijagrama). Izradio ju je 2012. godine Andrew Blair, profesor srednje škole u Londonu, kako bi promovirao istraživački usmjereno učenje u matematičkim učionicama. Poticaji uključuju numeričke, algebarske, geometrijske te poticaje statistike i vjerojatnosti za učenike različitih dobi. Stranica se razvija u suradnji s učiteljima koji svojim iskustvom i promišljanjem obogaćuju njezin sadržaj.
- 3) *The Robertson Program: Inquiry-based teaching in Mathematics and Science*⁹ je program za istraživački usmjereno poučavanje matematike i prirodnih znanosti koji stvara, demonstrira i širi modele podučavanja s fokusom na istraživanje učitelja i učenika. Cilj programa je pomoći učiteljima da postanu reflektivniji praktičari produblivanjem vlastitog znanja o matematici i prirodnim znanostima, kao i pomoći učenicima da razviju vještine kritičkog mišljenja potrebne za uspjeh u tim predmetima. Tim stručnjaka odgovoran je za osmišljavanje, provedbu i širenje projekata koji podržavaju istraživački usmjereno poučavanje matematike i prirodnih znanosti, a na njihovoj mrežnoj stranici dostupni su materijali za različite dobi učenika.

U nastavku slijede problemi iz svakog izvora koji oprimjeruju nestrukturirane probleme za rješavanje u istraživački usmjerenoj nastavi Matematike u nižim razredima osnovne škole, ujedno potkrijepljeni stvarnim iskustvom učitelja i učenika.

⁸Inquiry Maths (2023., 8. srpnja). Inquiry Maths. Pribavljeno 26.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home>

⁹The Robertson Program (n.d.). About us. Pribavljeno 5.8.2023. s <https://wordpress.oise.utoronto.ca/robertson/about-us/>

6.4.1. Oblik i prostor: Križanje papirnatih traka

Učenici su podržani u istraživanju oblika koje mogu napraviti kada prekriže dvije trake paus papira i ispituju sjecište između oba komada paus papira. Učenici će kroz eksperimentiranje istražiti i opisati različite geometrijske oblike i identificirati njihove specifične karakteristike, kao što su paralelnost stranica, duljine dužina, svojstva dijagonala i relacije između unutarnjih kutova (PRIMAS, 2013: 23).

Dob: 4 – 9 ili 10 – 14 godina

Potrebno vrijeme: otprilike 2 nastavna sata

Pedagoška razmatranja

Aktivnost pomaže učenicima da prepoznaju svojstva različitih vrsta četverokuta i uspostave veze među njima. U otvorenom istraživanju učenici sami izrezuju trake paus papira, a učitelj ih moli da eksperimentiraju, postavljaju pitanja, formuliraju hipoteze i pokušaju donijeti zaključke. U strukturiranom istraživanju učitelj učenicima dijeli pripremljene trake i nekoliko pitanja. Tijekom aktivnosti važno je da rasuđivanje učenika bude usmjereno na glavne varijable situacije: svojstva traka (paralelni rubovi ili ne) i njihov kut križanja. Činjenica da su duže stranice papirnatih traka paralelne ili ne, povezane s kutom križanja, dovodi do različitih vrsta četverokuta (PRIMAS, 2013: 23). Učitelj potiče učenike na povezivanje svojstava traka i kuta križanja s oblikom koji nastaje u njihovom sjecištu, dolazeći do mogućih definicija paralelograma, trapeza i trapezoida¹⁰. Aktivnost se može proširiti na različite načine, primjerice (PRIMAS, 2013: 24):

- a) Izgubljene trake paus papira. Učitelj moli učenike da naprave oblik križajući dvije trake paus papira i da ga izrežu škarama. Daje upute učenicima da u paru razmijene

¹⁰Trapezoid je četverokut kojemu su stranice različitih duljina i u kojem nema paralelnih stranica (enciklopedija.hr).

svoje oblike. Problem glasi: „Tvoj partner napravio je dobiveni oblik dvjema trakama, ali ih je izgubio. Možeš li izrezati trake koje je maloprije koristio?“

- b) Površina. „Možete li križanjem dviju traka paus papira pronaći onu s najvećom/najmanjom površinom?“
- c) Skriveni oblici. „Neki su oblici napravljeni križanjem traka paus papira, ali dio je skriven. Možete li nam pomoći saznati koji je to oblik?“

Praksa u učionici

Ovaj je zadatak proveden u razredu četvrte godine osnovne škole u Atarfeu (Granada, Španjolska). Prema riječima učitelja, njegovi su učenici već učili o mnogokutima, četverokutima i paralelogramima, stoga im se situacija nije činila previše izazovnom. Učitelj je pripremio materijal za svoje učenike: paus papir s različitim crtama i nekoliko škara. Učenici su izrezali svoje trake, dobivajući trake s paralelnim stranicama različitih širina, paralelnim stranicama istih širina te sa stranicama koje nisu paralelne. Nakon što su izrezali trake učenici su se počeli igrati i primjećivati stvari (PRIMAS, 2023: 24).

Kako bi bio siguran da učenici razumiju situaciju, učitelj je zatražio učenike da prekriže dvije trake paralelnih rubova i jednake širine. Učenici su ubrzo primijetili da mogu oblikovati kvadrate. Neki od njih primijetili su da se mogu oblikovati i rombovi. Učitelj je učenike podijelio u grupe i dao im upute da osmisle i nabroje svojstva situacije koja je dovela do dobivanja kvadrata. Nakon nekoliko diskusija, došli su do tri svojstva koja su potom zapisana na ploči: (1) trake s paralelnim rubovima, (2) trake iste širine i (3) okomito križanje (PRIMAS, 2013: 25).

Sada kada su učenici znali kako situacija funkcionira i kakve rezultate moraju tražiti, započela je faza istraživanja: „Možete li pronaći druge vrste oblika? Koji su uvjeti za dobivanje tih oblika? Zapišite u bilježnicu dobivene oblike i uvjete.“ Učenici su radili u grupama od troje ili četvero učenika, a učitelj je kružio razredom nudeći podršku i postavljajući učinkovita pitanja. Ubrzo su se pojavili problemi. Učenici su lako dobili pravokutnike i većina ih je znala nabrojati uvjete, ali su bili zbunjeni kada su tražili

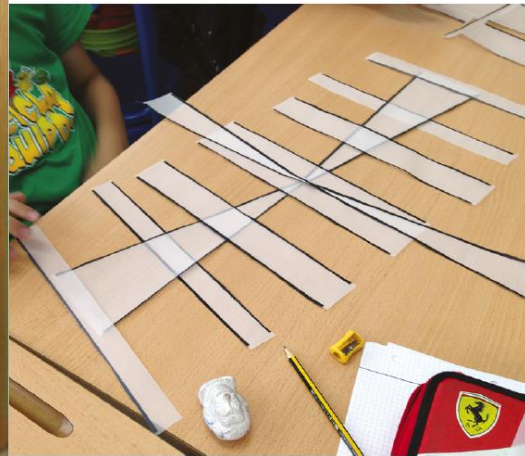
rombove, trapeze i trapezoide. Mnogi su učenici pokušali pronaći odgovore gledajući klasifikaciju paralelograma na zidu, ali ova stereotipna verzija svakog paralelograma nije bila od velike pomoći (PRIMAS, 2013: 25).

Nakon faze istraživanja učitelj je zamolio učenike da podijele svoje pronalaskе. Učenici su morali objasniti oblik koji su pronašli i uvjete potrebne za njegovo dobivanje, što je potaknulo vrlo zanimljivu diskusiju o paralelogramima, četverokutima i njihovim svojstvima. U nastavku su učenici u grupama radili na velikom plakatu. Cilj je bio strukturirati i formalizirati njihove nalaze. Učenici su uspjeli razviti dublje razumijevanje oblika i njihovih svojstava, potražiti i pronaći veze između njih i doći do novih definicija, a *Slika 7* i *Slika 8* prikazuju dijelove procesa istraživanja (PRIMAS, 2013: 26).

Slika 7. i 8. Križanje papirnatih traka



(PRIMAS, 2013: 25)

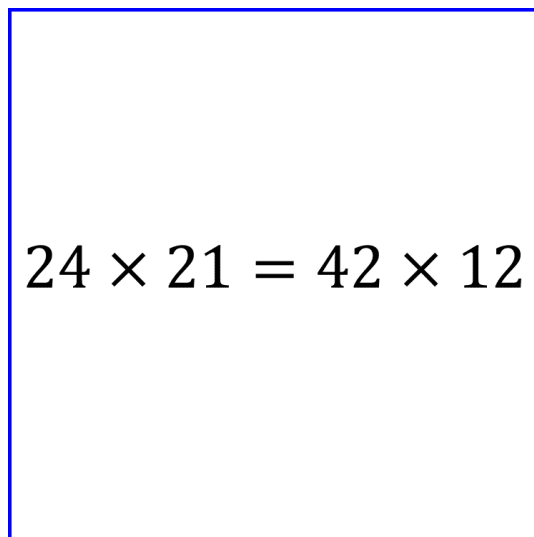


(PRIMAS, 2013: 26)

6.4.2. Brojevi: Istraživački poticaj o množenju

Istraživački poticaj koji se koristi u ovom scenariju (*Slika 9*) pojavio se 1956. u *Moskovskim zagonetkama* Borisa Kordemskog u kojima navodi cijeli skup jednadžbi ove vrste. Učenici u prvoj fazi istraživanja primjećuju da postoje dvije ključne značajke ili „pravila“ jednadžbe: brojevi su „udvostručeni i prepolovljeni“, a znamenke su „obrnute“. U istraživačkoj fazi orijentacije učenici obično postavljaju pitanja i tvrdnje poput: „Je li jednadžba točna?“, „Kako se množe dva dvoznamenkasta broja?“, „Jedan broj na desnoj strani je polovina jednog na lijevoj strani, a drugi je dvostruki“, „Znamenke brojeva na lijevoj strani obrnute su kako bi se dobili brojevi na desnoj strani“, „Vrijede li ova pravila uvijek?“, „Ima li to veze s udvostručenjem znamenki (1, 2 i 4)?“, „Postoje li druge jednadžbe poput ove?“

Slika 9. Istraživački poticaj o množenju


$$24 \times 21 = 42 \times 12$$

(Inquiry Maths, 2023)¹¹

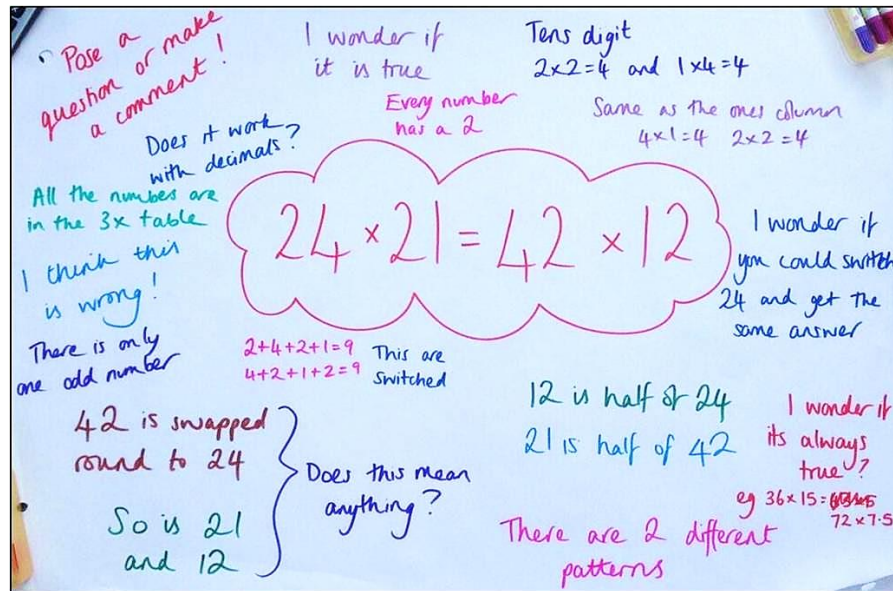
¹¹Inquiry Maths (2023., 10. lipnja). Number prompts: Multiplication inquiry. Pribavljeno 26.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home/number-prompts/24-x-21-42-x-12>

U ovoj fazi razred može koristiti regulatorne kartice radi signaliziranja potrebe za diskusijom i objašnjenjem postupaka za množenje dvaju dvoznačenkastih brojeva. Učenici entuzijastično traže više primjera iste vrste nakon što se uvjere da je jednadžba točna. Istraživački poticaj idealan je za razvijanje fluentnosti učenika s množenjem u širem kontekstu odgovaranja na njihova vlastita pitanja, testiranja vlastitih pretpostavki i postizanja ciljeva koje su postavili. Razvojem istraživanja učenici potvrđuju da pravilo „udvostručeno i prepolovljeno“ uvijek funkcionira, ali „obrnuto“ pravilo rijetko. Kako bi pronašli više primjera u kojima oba pravila funkcioniraju, učitelj može usmjeriti razred prema korištenju algoritma ili skupa uputa za generiranje više primjera.

Slika 10 prikazuje pitanja i komentare učenika 4. razreda osnovne škole Amande Klahn na Zapadnoj akademiji u Pekingu (Kina), međunarodnoj školi s istraživački usmjerenim kurikulumom. Amanda izvještava da je pokušavala uvesti više istraživanja na satovima matematike: „Kao uvod u korištenje istraživačkih poticaja radila sam sa svojim sposobnijim matematičkim misliocima. Bilo je puno uzbuđenja dok su otkrivali nove obrasce i zapisivali sjajna 'Što ako...?' pitanja. Postojalo je istinsko istraživanje, suradnja i međusobno izazivanje mišljenja.“¹²

¹²Inquiry Maths (2023., 10. lipnja). Number prompts: Multiplication inquiry. Pribavljeno 26.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home/number-prompts/24-x-21-42-x-12>

Slika 10. Istraživački poticaj s pitanjima za pokretanje istraživanja



(Inquiry Maths, 2023)¹³

6.4.3. Podatci, statistika i vjerojatnost: Abecedna statistika

Dob: 6 – 12 godina

Odgojno-obrazovni ishodi:

Učenik će moći:

- razvrstati skupove podataka o ljudima ili stvarima prema dva i tri svojstva koristeći tablice i logičke dijagrame (Vennov, Carrollov, dijagram stabla)
- prikupiti podatke promatranjem, eksperimentima i intervjuima
- bilježiti podatke metodama prema svojem izboru
- organizirati podatke u tablice

¹³Inquiry Maths (2023., 10. lipnja). Number prompts: Multiplication inquiry. Pribavljeno 26.7.2023. s <https://www.inquirymaths.com/home/number-prompts/24-x-21-42-x-12>

- prikazati skupove podataka piktogramima i stupčastim grafikonima s odgovarajućim izvorima, naslovima, oznakama i mjerilima
- analizirati različite skupove podataka predstavljene na različite načine, uključujući tablice, grafikone i piktograme
- donijeti uvjerljive argumente i informirane odluke postavljanjem i odgovaranjem na pitanja o podacima i donošenjem zaključaka
- koristiti matematički jezik, uključujući pojmove „nemoguće“, „malo vjerojatno“, „jednako vjerojatno“, „vjerojatno“ i „zasigurno“ za opisivanje vjerojatnosti odvijanja događaja
- koristiti vjerojatnost za stvaranje predviđanja i informiranih odluka

Materijali: list praznog papira za svakog učenika, popisi grupa prema bojama i imenima, olovke, računalo ili tablet po grupi, *Excel* tablica (*Slika 11*), primjer lista s naljepnicama, svitak papira za zamatanje sa slovima abecede poredanim od najčešće do najrjeđe korištenih (*Slika 12*)

Tijek sata

Učiteljica predstavlja aktivnost učenicima: „Sljedeća dva dana ćemo učiti abecedu. Zajedno ćemo istražiti abecedu i ideje o vjerojatnosti i statistici. Prije nego što vas podijelim u grupe, želim da svatko od vas napravi individualno predviđanje. Bez diskusije ili dijeljenja svojih misli s ostalima predvidite kojih je pet najčešće korištenih slova u našem jeziku. Drugim riječima, slova koja se najčešće pojavljuju kada autori pišu knjige, novinske članke i kada vježbamo svoje vještine pisanja! Napišite pet slova za koja mislite da se najčešće koriste i nacrtajte zvjezdicu pored slova za koje mislite da se najčešće koriste.“

Učiteljica svakom učeniku dijeli prazan list papira i olovku te daje učenicima otprilike dvije minute za bilježenje svojih odgovora. Dok učenici samostalno rade, učiteljica

određuje grupe od troje ili četvero željenom metodom grupiranja te na papire zapisuje grupe prema bojama. Kada svatko rangira svojih pet prvih slova, učiteljica proziva učenike prema grupama koje se organiziraju oko tepiha ili stolova. Učiteljica svakoj grupi dijeli popis grupe kako bi vidjeli kojoj boji pripada njihova grupa. Ovaj korak osigurava da kasnije unesu podatke svoje grupe u odgovarajući redak. Jedan učenik po grupi osigurava računalo ili tablet i učitava tablicu (*Slika 11*). Ako tehnologija nije dostupna, učitelj printa tablicu za svaku grupu.

Slika 11. Tablica za upisivanje najčešće korištenih slova

Groups	Most Used	Second Most Used
RED		
BLUE		
GREEN		
YELLOW		
PURPLE		
ORANGE		

(The Robertson Program, n.d.)

Nakon što svaka grupa dovrši svoja predviđanja, jedan član iz svake grupe unosi njihove podatke u tablicu na računalo ili papiru. Učiteljica daje upute učenicima da rade zajedno: „Podijelite svoja predviđanja i odredite kojih je pet slova u grupi najčešće korištenih. Unesite pet najčešće korištenih slova svoje grupe u tablicu.“ Učiteljica projicira tablicu na ploču, zatim kruži i sluša interakcije. Kada se predviđanja svih grupa upišu na ploču, pita učenike: „Koju metodu je vaša grupa koristila za određivanje vaših pet prvih slova?“ Na njihovom će popisu vjerojatno biti više samoglasnika nego suglasnika. Učiteljica pita:

„Zašto ima više samoglasnika nego suglasnika?“ Učenici mogu odgovoriti da sve riječi imaju samoglasnike. Učiteljica dalje postavlja pitanja: „Kome je stalo do učestalosti upotrebe slova u abecedi? Možete li se sjetiti nekoga tko to treba znati ili bi bilo dobro da zna?“ Ako netko kaže da nikoga ne bi bilo briga, učiteljica odgovara sa: „Znam nekoliko slučajeva u kojima bi ova informacija bila vrlo korisna. Ima li još ideja?“

Ako nema odgovora, učiteljica potiče učenike primjerima igara kao što je *Scrabble*. Ispituje učenike: „U igri *Scrabble* postoji devet A i jedno Z. Zašto ima više A nego Z? Što mislite koja slova vrijede više bodova, slova koja se pojavljuju češće ili rjeđe (A vrijedi 1, a Z vrijedi 10)? Koje biste slovo radije dobili?“ Nakon što su učenici razmijenili odgovore, učiteljica kaže: „Imam drugu upotrebu koja nema veze s igrom.“ Učiteljica projicira primjer lista s naljepnicama: „Umjetnici i dizajneri često koriste naljepnice sa slovima za prenošenje značenja. Što primjećujete o učestalosti ili broju korištenja različitih slova?“ Ako ovo pitanje ne potakne diskusiju, učiteljica pita učenike: „Što primjećujete o tome koliko se puta slovo A koristi u usporedbi sa slovom Z?“ Učenici bi trebali odgovoriti da ima više A nego Z. Nakon toga slijedi: „Količina svakog slova razlikuje se ovisno o tome koliko se često koriste. Ti se listovi ne bi prodavali ako bi umjetnici ostali bez određenih slova nakon jedne ili dvije rečenice.“

Učiteljica kaže učenicima: „Već znam koje se slovo najčešće koristi i pripremila sam popis svih slova abecede prema redoslijedu njihove upotrebe u našem jeziku. Zapisala sam ovaj niz na tajnom svitku.“ Učiteljica pokazuje učenicima smotani svitak, ali ne dijeli podatke. Nastavlja: „Prije nego što odmotamo rezultate, provest ćemo matematičko istraživanje. Vi ćete prikupiti statističke uzorke, a podatke ćemo koristiti za predviđanje učestalosti upotrebe svih slova u abecedi. Potom ćemo usporediti naša predviđanja s onim što je na tajnom svitku.“

Učiteljica nastavlja upute: „Bilo bi vrlo teško i nerazumno brojiti svako slovo ikada korišteno u svim djelima koja su ikada nastala na našem jeziku. Željela bih da svatko od vas večeras napravi domaći uradak. Odaberite rečenicu s najmanje pet riječi u bilo kojoj knjizi. Prepišite rečenicu na poledinu papira gdje ste napisali svoja predviđanja pet

najčešće korištenih slova. Ovom rečenicom saznajte i zabilježite koliko se puta svako slovo abecede pojavljuje u toj rečenici. Sutra donesite svoj list za bilježenje kako bi ga koristili u svojoj grupi.“ Učiteljica dopušta učenicima da odluče kako će pristupiti brojanju slova u rečenici koju su odabrali. Učenici mogu odlučiti koristiti tablicu za bilježenje svog rada. Učiteljica daje primjer učenicima ako su zbunjeni. Na idućem nastavnom satu analiziraju se pronađeni podaci.¹⁴

Slika 12. Svitak s najčešće korištenim slovima u (engleskoj) abecedi

Letter	
E	most commonly used letter
T	
A	
O	
I	
N	
S	
R	
H	
D	
L	
U	
C	
M	
F	
Y	
W	
G	
P	
B	
V	
K	
X	
Q	
J	
Z	least commonly used letter

(The Robertson Program, n.d.)

¹⁴The Robertson Program (n.d.). Alphabetical Statistics Day 1. Pribavljeno 5.8.2023. s <https://wordpress.oise.utoronto.ca/robertson/portfolio-item/alphabetical-statistics/>

7. PROMICANJE ISTRAŽIVAČKI USMJERENE NASTAVE

U izvješću Europske unije iz 2007. godine spominje se zabrinjavajuće smanjenje interesa mladih za prirodne znanosti i matematiku i navodi kako istraživački usmjerena nastava može povećati zanimanje učenika za te predmete (Rocard i sur., 2007, prema MERIA, 2017). Europska unija je u posljednjih desetak godina pokrenula projekte čiji je cilj provedba istraživački usmjerene nastave prirodnih znanosti i matematike na različitim razinama formalnog obrazovanja (Artigue i Baptist, 2012; Mass i Artigue, 2013; Ropohl i sur., 2016, prema MERIA, 2017), a u nastavku je navedeno nekoliko njih.

PRIMAS (*Promoting inquiry-based learning in mathematics and science across Europe*) je projekt Europske unije financiran u okviru Sedmog okvirnog programa za istraživanje, tehnološki razvoj i demonstracijske aktivnosti. Projekt je trajao četiri godine (2010. – 2013.) u 12 europskih država, a cilj projekta bio je promicanje istraživački usmjerenog učenja u matematici i prirodnim znanostima, povećanje interesa učenika za te predmete i poticanje na razvoj kompetencija rješavanja problema i samousmjerenog učenja. Učitelji su imali ključnu ulogu u provedbi istraživački usmjerene pedagogije, a PRIMAS ih je podržavao nastavnim materijalima (dostupnim i na mrežnoj stranici), tečajevima profesionalnog usavršavanja i kontinuiranim sustavom podrške u zajednicama istraživački usmjerene prakse (PRIMAS, 2013).

Sedmim okvirnim programom za istraživanje, tehnološki razvoj i demonstracijske aktivnosti financiran je *Fibonaccijev projekt* u trajanju od četiri godine (2010. – 2013.). Cilj projekta bio je promicanje istraživački usmjerenog prirodoslovnog i matematičkog obrazovanja u Europskoj uniji. Projekt je uključio sveukupno 37 centara iz 24 zemlje. Institucije s visokim priznanjima u znanstvenom obrazovanju obučavale su institucije u razvoju, kao što su sveučilišta, centri za obuku nastavnika, istraživačke institucije itd.

Zajedničkim radom izdana je brošura o istraživanju za prirodne znanosti i matematiku, a inovativni elementi projekta dijeljeni su putem raznih medija¹⁵.

Projekt MASCIL (*Mathematics and science for life*) trajao je četiri godine (2013. – 2016.) i povezoao poučavanje matematike i prirodnih znanosti s tržištem rada (MERIA, 2017). Cilj projekta bio je potaknuti zanimanje mladih Europljana za STEM predmete i karijere promicanjem istraživački usmjerenog učenja. Projekt se sastojao od izrade materijala za nastavu i profesionalni razvoj, profesionalnog usavršavanja nastavnika i suradnje sa stručnjacima. Rezultati projekta su zbirka testiranih materijala, alati za profesionalni razvoj, procjene utjecaja i snažna STEM obrazovna zajednica. Projekt MASCIL uspješno je poticao inovativne pristupe poučavanju i mogućnosti umrežavanja u STEM obrazovanju¹⁶.

Godine 2019. uspješno je završen trogodišnji Erasmus+ MERIA projekt (*Mathematics education – relevant, interesting and applicable*), a nositelj projekta bio je Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu. Cilj projekta bio je promicanje istraživački usmjerene nastave matematike, jačanje veza između srednjoškolskog i sveučilišnog matematičkog obrazovanja te pružanje prilike nastavnicima za profesionalni razvoj. Cilj je ostvaren zajedničkim radom nastavnika na osmišljavanju materijala za istraživački usmjerenu nastavu matematike, analiziranjem nastave i uvjeta za njezino uvođenje (Milin Šipuš i sur., 2019). Produkti projektnog tima dva su didaktička priručnika: *Praktični MERIA vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike* koji pruža teorijski okvir te kompilacija MERIA scenarija i modula koji su testirani i razvijeni u suradnji s nastavnicima u školama (MERIA, 2019).

¹⁵CORDIS (2014., 8. lipnja). Final Report Summary - FIBONACCI (The FIBONACCI Project - Large scale dissemination of inquiry based science and mathematics education). Pribavljeno 2.8.2023. s <https://cordis.europa.eu/project/id/244684/reporting>

¹⁶CORDIS (2017., 20. lipnja). Final Report Summary - MASCIL (Mathematics and science for life). Pribavljeno 2.8.2023. s <https://cordis.europa.eu/project/id/320693/reporting>

Projekt TIME (*Teachers' Inquiry in Mathematics Education*) nastavak je projekta MERIA-e koji se fokusirao na istraživački usmjereno poučavanje za poboljšanje matematičkog obrazovanja. Odobrio ga je Erasmus+ program i uključivao je 14 partnera iz 4 države. Projekt je započeo s aktivnostima 2019. godine i završio 2022. godine, a koordinirao ga je Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu. Cilj projekta bio je istražiti na koje načine zajednica nastavnika matematike koji rade u jednoj školi može poboljšati svoju praksu kroz zajedničko istraživanje, planiranje i interakciju¹⁷. Rezultati projekta tri su prijedloga oblika nastavnog sata prilagođenih srednjoškolskom matematičkom obrazovanju te tri tečaja o dizajnu inovativnih nastavnih materijala¹⁸.

7.1. Prednosti istraživački usmjerene nastave

Istraživački usmjerena nastava nudi brojne prednosti za učenike, što dovodi do sve veće provedbe ovog pristupa u obrazovanju. Dobrobiti pristupa uključuju povećana postignuća u matematici i prirodnim znanostima, a najveći utjecaj vidljiv je kod učenika nižeg samopouzdanja i nepovoljnog položaja (Europska komisija, 2007, prema PRIMAS, 2011). Istraživački usmjereno učenje poboljšava razumijevanje i pamćenje znanstvenog znanja kod učenika (Walker, 2007, prema PRIMAS, 2011). Promiče prijenos znanja u nove situacije i kontekste te potiče vještine razmišljanja višeg reda i razvoj ključnih kompetencija (PRIMAS, 2011). Istraživački usmjerena nastava pruža mogućnosti učenicima za razvijanje vještina poput suradnje, usmenog i pismenog izražavanja te otvorenog rješavanja problema u različitim disciplinama (Europska komisija, 2007, prema PRIMAS, 2011).

Istraživački usmjerenom nastavom učenici stječu uvid u to kako znanstvenici stvaraju znanje i kako se znanstveno razumijevanje razvija tijekom vremena, što dovodi do uravnoteženije i realističnije percepcije znanosti i njezine prirode (Walker, 2007; Schwab,

¹⁷TIME (2019). About project. Pribavljeno 2.8.2023. s <https://time-project.eu/en/about-project>

¹⁸TIME (2019). Activities and results. Pribavljeno 2.8.2023. s <https://time-project.eu/en/activities-and-results>

1962, prema PRIMAS, 2011). Istraživački usmjerena nastava pozitivno utječe na stavove i motivaciju učenika prema matematici i prirodnim znanostima koje za njih postaju zanimljivije i uzbudljivije. Pozitivni učinci istraživački usmjerene nastave mogu se proširiti i na profesionalne težnje učenika i povećati njihovu želju da se bave znanstvenim disciplinama (PRIMAS, 2011). Ovaj pristup posebice može pozitivno utjecati na djevojčice i povećati njihov interes, samopouzdanje i sudjelovanje u znanstvenim aktivnostima (Europska komisija, 2007, PRIMAS, 2011).

Provedena su mnoga istraživanja o prednostima provedbe istraživački usmjerene nastave. Guido (2017, prema Gholam, 2019) navodi sedam prednosti: osnaživanje sadržaja kurikula, pripremanje mozga za učenje, poticanje dubljeg razumijevanja sadržaja, osjećaj nagrađenog učenja, razvijanje inicijative i samousmjeravanja, funkcioniranje u gotovo svakoj učionici te ponudba diferenciranih uputa. Council (2000, prema Khalaf i Mohammed Zin, 2018) identificira tri razloga za provedbu istraživački usmjerenog učenja: poboljšanje praktičnog razumijevanja, povećanje angažmana u čitanju, pisanju i kritičkim diskusijama te poticanje učeničkog sudjelovanja u kritičkom argumentiranju logičkim zaključivanjem. Pojedina kvantitativna istraživanja rezultirala su boljim rezultatima istraživački usmjerenog podučavanja u usporedbi s direktnim uputama ili otkrivanjem bez pomoći (Alfieri i sur., 2011; Furtak i sur., 2012, prema Pedaste i sur., 2015).

Istraživanje Fielding-Wells i Makar (2008, prema Fielding-Wells i sur., 2017) sugerira da istraživački usmjerena nastava matematike u nižim razredima osnovne škole povećava angažman učenika te smanjuje njihovu frustraciju i anksioznost. Istraživanje Taylor (2009, prema McGregor, 2016) upućuje na to da je istraživački usmjereno učenje značajno poboljšalo stavove i uvjerenja učenika nižih razreda osnovne škole o matematici. Druge prednosti istraživački usmjerenog učenja u matematici uključuju povećanje motivacije, fokusa na pitanja i sposobnosti ispravljanja miskoncepcija (Artigue i Blomhøj, 2013; Vars, 1997, prema McGregor, 2016). Istraživački usmjerene učionice pružaju neposredna iskustva koja proturječe uvjerenjima učenika (Artigue i Blomhøj, 2013, prema McGregor,

2016). Istraživački usmjereno okruženje potiče suradnju i interakciju te povećava percipiranu korisnost predmeta (De Corte i sur., 2008, prema McGregor, 2016).

Wolf i Fraser (2008, prema Khalaf i Mohammed Zin, 2018) istražili su utjecaj tradicionalnih i istraživačkih usmjerenih metoda učenja na učenike. Istraživanje je proučavalo metodologiju učenja i postignuća učenika u nastavi prirodnih znanosti te je otkrivena razlika u izvedbi učenika tijekom procesa učenja. Rezultat istraživanja jest da je istraživački usmjereno učenje učinkovitija metoda učenja za ostvarenje ishoda učenika i uspješnosti učenja od tradicionalne metode. Tradicionalni model učenja naišao je na nedostatke u učenikovom znanju, vještinama, kompetencijama i ishodima, a istraživački usmjeren model naišao je na nedostatke u primjeni i funkciji. Nedostaci istraživački usmjerenog učenja tijekom primjene bili su vezani za školski sustav, kurikulum i ulogu učitelja, a funkcionalni nedostaci vezani za učenike, odnosno njihovu motivaciju, prethodno znanje, sposobnost upotrebe tehnologije i upravljanja aktivnostima učenja (Khalaf i Mohammed Zin, 2018).

Istraživanje Boaler (1998, prema Bruder i Prescott, 2013) pokazalo je kako su učenici u učionicama istraživački usmjerene nastave pokazali slično ili bolje razumijevanje sadržaja u usporedbi s onima u tradicionalnim učionicama, posebice na standardiziranim testovima. Učenici koji su pohađali istraživački usmjerenu nastavu uživali su u matematici, a učenici koji su pohađali tradicionalnu nastavu pokazali su odbojnost prema udžbenicima i zabrinutost zbog manjka razumijevanja. Također su pokazali fleksibilno razmišljanje korištenjem matematike u novim situacijama, dok su tradicionalno poučavani učenici smatrali da se moraju prisjetiti pravila ili metode koje su koristili u sličnim situacijama. Istraživački usmjereno učenje pozitivno je utjecalo na vještinu kritičkog mišljenja, stava prema učenju i samopouzdanja učenika 4. i 5. razreda osnovne škole.

Istraživanje o istraživački usmjerenom učenju ukazalo je na superiornost istraživačke metode u odnosu na pristup pravila i primjera (Hermann, 1981, prema Bruder i Prescott, 2013). Istraživanje koje je proveo Hattie (2009, prema Bruder i Prescott, 2013) ukazalo je na to kako je istraživački usmjereno učenje ojačalo vještine kritičkog mišljenja te

poboljšalo postignuća i pozitivne stavove prema predmetu. Većina projekata istraživački usmjerenog učenja rezultirala su dobitima u znanstvenom sadržaju i procesu učenja. Pozitivne strane istraživački usmjerenog učenja su bolja motivacija, razumijevanje matematike i razvoj pozitivnih uvjerenja o važnosti matematike u životu i društvu. Vođeno istraživanje pokazalo se kao najučinkovitija metoda za provedbu istraživački usmjerenog učenja sa zatvorenim zadacima koji podržavaju učenje pravila (Bruder i Prescott, 2013).

Učitelji provedbu istraživački usmjerene nastave u razredu doživljavaju kao izazovnu, ali dobrodošlu priliku za drugačije osmišljavanje nastavnog sata. Iskustva učitelja ističu pozitivni utjecaj istraživački usmjerenih procesa na razmišljanje učenika, razmjenu mišljenja i informacija te povezivanja učenja i zabave (MERIA, 2017). Učitelji uključeni u MERIA projekt uočili su da istraživački usmjerena nastava matematike donosi veću dinamiku u razredu i da su MERIA scenariji učenicima zanimljivi (Milin Šipuš i sur., 2019). Učenici su bili više angažirani kada su shvaćali da postoji logično i znanstveno objašnjenje iza elementa misterije i pogađanja. Posebice su voljeli kreativno prezentiranje rezultata (npr. pisanje pisma gradonačelniku) i rad u relevantnim kontekstima poput diskusije o plaćama ili konstruiranja slajdova (MERIA, 2019). Istraživački usmjerena nastava pozitivno je utjecala na učenike s nižim razinama postignuća, bez negativnog utjecaja na učenike s višim razinama postignuća (Kogan i Laursen, 2014, prema Milin Šipuš i sur., 2019).

Povratne informacije studenata o MERIA scenarijima ukazuju na visoku razinu interesa i sklonosti istraživački usmjerenom pristupu. Većina učenika u Hrvatskoj (90%) smatra da su istraživački usmjereni nastavni satovi zanimljiviji od tradicionalnih. Štoviše, znatan postotak učenika u Hrvatskoj (75%) izrazio je želju za takvim nastavnim satovima na redovnoj osnovi (tjedno ili svaka dva tjedna). U istraživanju koje je obuhvatilo 119 učenika iz četiri škole u Hrvatskoj, 75,7% smatra da je sat zanimljiviji od redovne nastave, a 47,1% smatra da matematika nakon nastave postaje relevantnija i povezana sa svakodnevnim životom. Učenici su istaknuli grupni rad, korištenje računala i samostalan rad kao razlikovne čimbenike ove nastave (MERIA, 2019).

7.2. Nedostaci istraživački usmjerene nastave

Provedba istraživački usmjerene nastave predstavlja nekoliko izazova za učitelje. Mnogi učitelji vjeruju da je teško integrirati istraživački usmjereno učenje u kurikulum, smatrajući ga manje učinkovitim od tradicionalnih metoda za pokrivanje nastavnog sadržaja. Učitelji strahuju da bi im to oduzelo previše vremena i poremetilo njihov pretrpani raspored. Još jedna zabrinutost tiče se toga što bi roditelji mogli pogrešno shvatiti istraživački usmjerenu nastavu, misleći kako učitelji napuštaju svoju odgovornost za podučavanje specifičnih tehnika. Osim toga, učenici se u početku mogu opirati istraživački usmjerenom učenju jer zahtijeva prelazak s pasivnog učenja na aktivne uloge te dovodi do sumnje i nesigurnosti oko pristupa. Prevladavanje ovih izazova zahtijeva ustrajne napore, pomna objašnjenja roditeljima i postupnu prilagodbu učenika. Poticanje učenika da postavljaju pitanja, suradnički uče i provode svoje istraživanja pomaže im u uspješnoj prilagodbi na istraživački usmjerenu nastavu. Unatoč ovim preprekama, dugoročne prednosti poput dubljeg razumijevanja i samostalnosti u učenju čine ju vrijednom razmatranja i primjene (PRIMAS, 2013).

Istraživački usmjerena nastava ima svoje prednosti, ali nije bez kritika i prepreka za šire usvajanje. Anderson (1996, prema PRIMAS, 2011) identificira tehničke, političke i kulturološke probleme povezane s istraživački usmjerenom nastavom. Tehnički problemi uključuju ograničene sposobnosti učitelja u poučavanju, prethodnu odanost tradicionalnim metodama, izazove u vrednovanju i poteškoće u upravljanju grupnim radom. Politički problemi obuhvaćaju ograničeno profesionalno usavršavanje, otpor roditelja, otpor obrazovnih vlasti, sukobe među učiteljima, nedostatak sredstava i različita stajališta o pravdi i poštenju. Kulturološki problemi odnose se na stavove o vrednovanju, uvjerenja učitelja i jak naglasak na „pokrivenost“ nastavnog sadržaja kako bi se učenici adekvatno pripremili za sljedeću razinu školovanja.

Walker (2007, prema PRIMAS, 2011) navodi dodatne probleme s kojima se učitelji često susreću pri provedbi istraživački usmjerene nastave. Istraživački usmjereno učenje od učenika zahtijeva istraživanje, formuliranje pitanja, osmišljavanje eksperimenata i izradu

modela, što traje dulje od tradicionalne nastave i predstavlja vremenski problem. Dodatna zabrinutost je zbog toga što istraživački usmjereni nastavni satovi neće uvijek funkcionirati kako je predviđeno. Budući da učenici preuzimaju aktivniju ulogu na nastavnom satu, u istraživački usmjerenoj nastavi učitelji mogu izgubiti dio kontrole nad procesom učenja. Učenici se u početku mogu opirati napuštanju njihovog poznatog okruženja za učenje. Međutim, istraživanja ukazuju na to da, nakon prevladavanja početnog otpora, učenici matematiku i prirodne znanosti smatraju zanimljivijima, korisnijima i ugodnijima. Učitelji se često susreću s problemom nedovoljne obučenosti i podrške u provedbi istraživački usmjerene nastave. Programi profesionalnog usavršavanja, poput PRIMAS-a, mogu ponuditi dugoročnu podršku učiteljima, a uključivanje više kolega iz iste škole može povećati učinkovitost takvih programa.

Lawson (2000, prema PRIMAS, 2011) tvrdi kako provedba istraživački usmjerenog učenja u učionici može naići na nekoliko izazova. Učitelji mogu imati poteškoće u upravljanju istraživački usmjerenim učionicama, uključujući i probleme sa sudjelovanjem učenika. U svrhu osiguranja aktivnog sudjelovanja učenika, učitelji bi trebali pažljivo kontrolirati veličinu grupe, svakom članu dodijeliti specifične zadatke i koristiti učinkovite tehnike postavljanja pitanja za poticanje uključenosti. Drugi je problem to što neki učenici mogu imati problema s iniciranjem istraživanja zbog nejasnih uputa ili nerazumijevanja ciljeva problema. Učitelji bi trebali dati jasne smjernice i potaknuti učenike da pronađu potrebne informacije. Osim toga, nekim učenicima može nedostajati osnovno znanje potrebno za istraživanje. Pažljivo planiranje i analiza istraživački usmjerenih aktivnosti može pomoći u smanjenju ovog problema, kao i uvođenje relevantnih temeljnih informacija na početku nastavnog sata.

Buczynski i Inoue (2011) proučavale su izvođenje pripravnika u matematičkom kampu i identificirale kamene spoticanja koji ometaju učinkovitu provedbu dobro osmišljenih istraživački usmjerenih nastavnih satova. Definirale su kamen spoticanja kao trenutke kada su pripravnici reagirali na način koji je narušio istraživački usmjerene ciljeve i smanjio kvalitetu lekcije. Istraživačice su otkrile da bi se obučavanje pripravnika trebalo

usredotočiti na predviđanje različitih odgovora učenika, razvijanje dubokog znanja o pedagoškom sadržaju za davanje smislenih objašnjenja i analiziranje postupaka pripravnika u razredu. Istraživanje je identificiralo 13 vrsta kamena spoticanja koji su bili međusobno povezani, a jedan je predvodio drugome. Na primjer, kada se suočio s izostankom učeničkog odgovora na pitanje, nesigurnost pripravnika dovela je do postavljanja sugestivnih pitanja koja ne dopuštaju učenicima potpuno razumijevanje koncepta. Kako bi potaknuli uspješnu istraživački usmjerenu nastavu, učitelji bi trebali biti svjesni ovih potencijalnih pogrešnih koraka i izbjegavati kamene spoticanja u budućim nastavnim satovima (Buczynski i Inoue, 2011).

Krajcik i sur. (1998, prema Khalaf i Mohammed Zin, 2018) primijetili su da su se učenici suočavali s preprekama u provođenju istraživanja tijekom istraživački usmjerene nastave. Walker (2007, prema Khalaf i Mohammed Zin, 2018) je te prepreke kategorizirao u one koji se odnose na školski sustav, resurse i učitelje. Literatura ističe i nedostatak dostatnih kurikula ili sustava koji podržavaju odgovarajuću primjenu istraživački usmjerenog učenja. Učitelji često nemaju pristup tečajevima za istraživački usmjerenu nastavu ili im je teško pohađati radionice zbog geografskih ograničenja (Dorier i Maab, 2012, prema Khalaf i Mohammed Zin, 2018). Jedan od izazova jest prijelaz iz uloge tradicionalnog instruktora u vodiča koji usmjerava proces učenja. Mnogi se učitelji mogu osjećati nelagodno ili imati nedostatak povjerenja u prihvaćanje nove uloge, stoga im je potrebno pružiti podršku (Keys i Bryan, 2001, prema Khalaf i Mohammed Zin, 2018). Edelson i sur. (1999, prema Khalaf i Mohammed Zin, 2018) u svojem su istraživanju identificirali nekoliko nedostataka primjene istraživački usmjerenog učenja, a neki od njih su: nedostatak motivacije učenika, nedostatak uvida učenika u istraživačke tehnike i prethodno znanje učenika o istraživački usmjerenom učenju.

8. ZAKLJUČAK

Istraživački usmjerena nastava Matematike pristup je učenju i poučavanju u kojem učenici postupaju poput matematičara kako bi konstruirali znanje. Učitelj preuzima ulogu suistraživača koji usmjerava učenike, stvara pogodno okruženje za istraživanje, potiče suradničko učenje i postavlja učinkovita pitanja. Učenici su aktivni sudionici u procesu učenja, samousmjeravaju vlastito učenje, sudjeluju u istraživanju sličnom znanstvenom i surađuju s vršnjacima. Cilj rada bio je dati pregled dosadašnjih istraživanja o istraživački usmjerenoj nastavi i navesti primjere njezine provedbe u nastavi Matematike u nižim razredima osnovne škole. Istraživanja ukazuju na prednosti pristupa kao što su poboljšana školska postignuća, dublje razumijevanje, razvoj vještina kritičkog mišljenja te povećana motivacija i aktivnost učenika. Izazovi provedbe istraživački usmjerene nastave očituju se u zabrinutosti učitelja zbog vremenskog ograničenja, nerazumijevanja roditelja, potencijalnog otpora učenika i preuzimanja uloge vodiča. Istraživački usmjerena nastava Matematike provodi se matematičkim istraživanjima, nestrukturiranim problemima koji se rješavaju kombiniranjem i razvijanjem metoda i znanja na nov način. Izvori kao što su PRIMAS, *Inquiry Maths* i *The Robertson program* promiču istraživački usmjereno učenje i pružaju resurse za provedbu istraživački usmjerene nastave Matematike u nižim razredima osnovne škole. U kontekstu izazova koje donosi 21. stoljeće, ovaj pristup oprema učenike vještinama, načinom razmišljanja i fleksibilnošću potrebnima za snalaženje u složenom svijetu ubrzanog razvoja.

9. LITERATURA

1. Alberta Learning (2004). *Focus on inquiry: A Teacher's Guide to Implementing Inquiry-based learning*. Edmonton: Learning (1999-2004).
2. Artigue, M., Baptist, P. (2012). *Inquiry in Mathematics Education*. Pribavljeno 1.4.2023. s https://fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/inquiry_in_mathematics_education.pdf
3. Artigue, M., Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45, 797–810.
4. Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W. i Léna, P. (2012). *Learning through inquiry*. Pribavljeno 1.4.2023. s https://fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/learning_through_inquiry.pdf
5. Bjelanović Dijanić, Ž. (2012). Računalo u istraživačkom radu učenika u nastavi matematike. *Napredak: Časopis za iinterdisciplinarna istraživanja u odgoju i obrazovanju*, 153 (2), 203-218.
6. Blair, A. (2014). Inquiry Maths: An idea whose time has come. *Mathematics Teaching*, 240(32), 32-35.
7. Blair, A. (2020). Planning and unplanning mathematical inquiry. *Mathematics Teaching*, 271, 40-41.
8. Bogar, Y. (2019). Literature Review on Inquiry-Based Learning in Science Education. *Uluslararası Bilim ve Eğitim Dergisi*, 1(2), 91-118.
9. Bruder, R., Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM Mathematics Education*, 45, 811–822.
10. Buczynski, S., Inoue, N. (2011). You Asked Open-Ended Questions, Now What? Understanding the Nature of Stumbling Blocks in Teaching Inquiry Lessons. *The Mathematics Educator*, 20(2), 10–23.
11. Calleja, J. (2016). Teaching Mathematics through Inquiry. *Educational Designer*, 3(9), 1-29.

12. Drobnič Vidic, A. (2020). Primerjava dveh interdisciplinarnih, na učenca usmerjenih učnih pristopov za vpeljavo na področje matematike. *Šolsko polje*, 31(3-4), 185-221.
13. enciklopedija.hr (2021). *Trapezoid*. Pribavljeno 1. 9. 2023. s <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=62082>
14. Ernst, D. C., Hodge, A., Yoshinobu, S. (2017). What Is Inquiry-Based Learning? *Notices of the American Mathematical Society*, 64(6), 570-574.
15. Fielding-Wells, J., Dole, S., Makar, K. (2014). Inquiry pedagogy to promote emerging proportional reasoning in primary students. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 47-77.
16. Fielding-Wells, J., O'Brien, M., Makar, K. (2017). Using expectancy-value theory to explore aspects of motivation and engagement in inquiry-based learning in primary mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 29, 237–254.
17. Friesen, S., Scott, D. (2013). Inquiry-Based Learning: A Review of the Research Literature. *Alberta Ministry of Education*, 32, 1-32.
18. Gerhátová, Ž., Perichta, P., Drienovský, M., Palcut, M. (2021). Temperature Measurement – Inquiry-Based Learning Activities for Third Graders. *Education Sciences*, 11(9), 506, 1-30.
19. Gholam, A. P. (2019). Inquiry-Based Learning: Student Teachers' Challenges and Perceptions. *Journal of Inquiry and Action in Education*, 10(2), 112-133.
20. Hodnik, T., Krek, J. (2022). Beyond Dichotomies in Mathematics Teaching. U Z. Kolar-Begović, R. Kolar-Šuper, A. Katalenić (ur.), *Advances in research on teaching mathematics* (str. 40-52). Osijek: Element.
21. Khalaf, B. K., Mohammed Zin, Z. B. (2018). Traditional and Inquiry-Based Learning Pedagogy: A Systematic Critical Review. *International Journal of Instruction* 11(4), 545-564.
22. Makar, K. (2012). The Pedagogy of Mathematical Inquiry. U R. M. Gillies (ur.), *Pedagogy: New Developments in the Learning Sciences* (str. 371-397). New York: Nova Science Publishers.

23. McGregor, D. G. (2016). *Exploring the Impact of Inquiry Learning on Students' Beliefs and Attitudes towards Mathematics*. [doktorski rad, The University of Queensland]. UQ eSpace: The University of Queensland's institutional repository. <https://espace.library.uq.edu.au/view/UQ:388657>
24. MERIA (Mathematics Education – Relevant, Interesting and Applicable) (2019). *MERIA project impact analysis*. Pribavljeno 26.4.2023. s <https://meria-project.eu/sites/default/files/2019-09/MERIA%20Project%20Impact%20Analysis.pdf>
25. MERIA (Mathematics Education – Relevant, Interesting and Applicable) (2017). *Praktični MERIA vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike*. Pribavljeno 26.4.2023. s https://meria-project.eu/sites/default/files/2017-11/MERIA%20Practical%20Guide%20to%20IBMT_HRV.pdf
26. Milin Šipuš, Ž., Špalj, E., Bašić, M., Antoliš, S. (2019). Projekt MERIA i istraživački usmjerena nastava matematike. *Matematika i škola*, 101(2), 3-12.
27. Norman, Z. D. (2022). Understanding the Effect of Inquiry-based Learning Experiences on Students' Engagement and Social & Academic Success in Public School Science and Math Education. *SSRN Electronic Journal*, 1-27.
28. Pasternack, P. (2019). Concepts and Case Studies: The State of Higher Education Research on Inquiry-Based Learning. U H. A. Mieg (ur.), *Inquiry-Based Learning – Undegraduate Research* (str. 19-26). Berlin: Springer Open.
29. Pedaste, M., De Jong, T., Kamp, E. T., Manoli, C. C., Mäeots, M., Riesen, S. A. N., Siiman, L., Tsourlidaki, E., Zacharia, Z. C. (2015). Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle. *Educational Research Review*, 14, 47-61.
30. Perković Kirijan, I. (2016). *Uloga zadovoljstva i zaokupljenosti poslom učitelja u istraživačkoj nastavi Prirode i društva*. [doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu]. CROSBİ: Hrvatska znanstvena bibliografija. <https://www.bib.irb.hr/808317>
31. PRIMAS (Promoting inquiry-based learning in mathematics and science across Europe) (2011). *Inquiry-based learning in maths and science classes*. Pribavljeno

- 15.4.2023. s https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/10/PRIMAS_Guide-for-Professional-Development-Providers-IBL_110510.pdf
32. PRIMAS (Promoting inquiry-based learning in mathematics and science across Europe) (2013). *PRIMAS guide for professional development providers*. Pribavljeno 7.1.2023. s https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf
33. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: Utrecht University.
34. Wells, A. (2011). *Inquiry-based learning: fact or fallacy?* [diplomski rad, University of Manitoba]. MSpace: University of Manitoba's Institutional Repository. <https://mspace.lib.umanitoba.ca/handle/1993/4743>
35. Zorić, V. (2008). Sokratova dijaloška metoda. *Život i škola, LIV(20)*, 27-40.