

# Otkrivanje oblika i prostora u ustanovama za rani i predškolski odgoj

---

**Horvat, Nikolina**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Rijeci, Učiteljski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:189:709196>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-20**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Teacher Education - FTERI Repository](#)



**SVEUČILIŠTE U RIJECI**  
**UČITELJSKI FAKULTET U RIJECI**  
**Preddiplomski sveučilišni studij Rani i predškolski odgoj i obrazovanje**

**Otkrivanje oblika i prostora u ustanovama za rani i predškolski odgoj**

**ZAVRŠNI RAD**

Predmet: Matematika u vrtiću

Mentor: Sanja Vranić, pred.

Student: Nikolina Horvat

Matični broj: 0299011855

**Rijeka, 2022.**

## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

„Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da sam završni rad izradila samostalno, uz preporuke i savjetovanje s mentorom. U izradi rada pridržavala sam se Uputa za izradu diplomskog/završnog rada i poštivala odredbe Etičkog kodeksa za studente/studentice Sveučilišta u Rijeci o akademskom poštenju.“

Potpis studentice:



---

## SAŽETAK

U završnom radu "*Otkrivanje oblika i prostora u ustanovama za rani i predškolski odgoj*" obrađeni su osnovni koncepti rane matematike u ustanovi ranog i predškolskog odgoja i obrazovanja. Stavljen je naglasak na dječje razumijevanje i razvijanje matematičkih, točnije, geometrijskih koncepata oblika i prostora. Učenje matematike ključno je za djecu rane i predškolske dobi. To im daje samopouzdanja da istražuju i razvijaju razumijevanje svijeta oko sebe. Vještine i znanje o matematičkim pojmovima s vremenom postaje složenije. Dobar način za razumijevanje specifičnih koncepata potrebnih za postavljanje čvrstih temelja u matematici je identificiranje ciljeva i rada na njima - prilikom čega se djeci treba ponuditi različite prilike da testiraju i uvježbavaju svoje matematičke vještine. Stoga je cilj ovog rada analizirati kako djeca otkrivaju oblik i prostor. Izuzev Van Heile teorije o razinama razvoja geometrijskog mišljenja kod djece, korištena je raznolika literatura te se u radu izdvaja nekoliko aktivnosti za istraživanje oblika i prostora u ranom i predškolskom odgoju i obrazovanju.

**Ključne riječi;** dijete, geometrija, Van Heil, rana matematika, oblik, prostor, geometrijska tijela i oblici

## SUMMARY

In the final paper "Discovering shape and space in institutions for early and preschool education" the basic concepts of early mathematics in the institution of early and preschool education were covered. Emphasis is placed on children's understanding and development of mathematical, more precisely, geometric concepts of shape and space. Learning mathematics is essential for young children. This gives them the confidence to explore and develop an understanding of the world around them. Skills and knowledge of mathematical concepts become more complex over time. A good way to develop an understanding of the underlying concepts in mathematics is to identify learning outcomes and work toward them - offering children a variety of opportunities to test and practice their math skills. Therefore, the goal of this paper was to analyze how children discover shape and space. Apart from Van Heiles theory about the levels of development of geometric thinking in children, a variety of literature was used and several activities for discovering shapes and spaces in early and preschool education are highlighted in the paper.

**Keywords;** child, geometry, Van Heile, early mathematics, shape, space, geometric bodies and shapes

# SADRŽAJ

<b>1. UVOD.....</b>	<b>1</b>
<b>2. RANA MATEMATIKA U PREDŠKOLSKOJ DOBI .....</b>	<b>3</b>
2.1. Sadržaj rane matematike.....	3
2.2. Važnost rane matematike .....	5
2.3. Povezanost rane matematike sa ranom pismenošću .....	6
2.4. Razumijevanje dječjih numeričkih kompetencija.....	7
2.5. Razvijanje geometrijskog mišljenja.....	8
2.5.1. Razina 0 - Vizualizacija.....	9
2.5.2. Razina 1 - Analiza .....	10
2.5.3. Razina 2 - Apstrakcija - Informalna dedukcija.....	10
2.5.4. Razina 3 - Dedukcija .....	11
2.5.5. Razina 4 - Strogost .....	12
2.5.6. Van Heileove faze učenja .....	12
<b>3. OTKRIVANJE OBLIKA I PROSTORA .....</b>	<b>15</b>
3.1.1. Percepcija različitosti i istosti .....	16
3.1.3. Imenovanje .....	18
3.1.4. Razumijevanje .....	18
3.1.5. Slaganje i razlaganje oblika.....	20
3.2. Otkrivanje prostora .....	20
3.2.1. Važnost matematičkog razumijevanja prostora.....	22
3.3. Aktivnosti za otkrivanje oblika i prostora .....	23
3.3.1. Identificiranje, uspoređivanje i sortiranje oblika .....	23
3.3.2. Likovno izražavanje i otkrivanje oblika otiskom .....	24
3.3.3. Izrada oblika .....	25
3.3.4. Čitanje.....	27
3.3.5. Igra .....	27
3.3.6. Pjesma i pokret.....	28
3.3.7. Pijesak i voda .....	28
<b>4. ULOGA ODGAJATELJA URAZVOJU MATEMATIČKIH POJMOVA .....</b>	<b>29</b>
4.1. Znanja koja ima kompetentan odgajatelj .....	31
4.1.1. Matematičko znanje .....	31
4.1.2. Pedagoško znanje o djeci .....	31
4.1.3. Znanje o nastavnoj praksi .....	32
4.2. Stručnost poučavanja matematike .....	32
4.3. Kvalitetno usvajanje pojmova rane matematike .....	33
<b>5. Zaključak .....</b>	<b>34</b>
<b>6. Literatura.....</b>	<b>35</b>

## 1. UVOD

U ovom radu bavit ću se dječjim otkrivanjem oblika i prostora u ustanovama za rani i predškolski odgoj i obrazovanje. Nakon što definiram sam pojam rane matematike, njen sadržaj i važnosti za cjeloviti razvoj dječjih kompetencija, detaljnije ću obraditi kako djeca otkrivaju oblike i prostor te ćemo, s obzirom na prikupljeno literaturu, izdvojiti nekoliko strategija, metoda i poticaja za otkrivanje oblika i prostora unutar ili van sobe dnevnog boravka djece rane i predškolske dobi. Na samom kraju rada dat ću zaključak na temelju svega do tad obrađenog u domeni rada.

Parlament i Vijeće Europske unije su u dokumentu *“Preporuke o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje”* (2006.) definirali matematičke kompetencije kao : *“sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja kako bi se riješio niz problema u svakodnevnim situacijama. Uz dobru numeričku pismenost (vladanje brojevima i računskim operacijama), naglasak je na procesu i aktivnosti, kao i na znanju. Matematička kompetencija uključuje, na različitim stupnjevima, sposobnost i volju za korištenjem matematičkih načina mišljenja (logičko i prostorno mišljenje) i prikazivanja (formule, modeli, konstrukcije, grafovi, grafikoni).”*

„Geometrija je grana matematike koja u svojoj izvornoj problematici proučava položaj, oblik, i svojstva geometrijskih tijela u prostoru te njihov međusobni odnos“<sup>1</sup>.

Djeca počinju spoznavati geometriju kroz izravnu interakciju sa fizičkim svijetom.

Mala djeca razvijaju osjećaj za oblike i prostorni zor kroz interakciju s predmetima i iskustvima koja uključuju njihova tijela. Vrijeme na igralištu će ih izložiti rječniku i pojmovima kao što su duže, šire, prije, poslije itd. Stajanje u redu i predviđanje koliko vremena prije nego što dođe na red, na temelju broja djece koja čekaju da se igraju na toboganu, također je matematičko iskustvo. (Čižmešija, Svedrec, Radović & Soucie, 2010.)

Napomenimo da mi vidimo dvodimenzionalne oblike kao neke strane trodimenzionalnih oblika svakodnevnih predmeta. Čak i kada izrežemo dvodimenzionalni oblik od najtanjeg papira on ima debljinu i postaje trodimenzionalni oblik. Također, uobičajeni matematički oblici (kvadrati, trokuti, kocke, sfere...) su zapravo apstraktne ideje koje kreiramo u našem umu te najčešće nisu savršeni kada ih uočimo u vlastitoj okolini.

---

<sup>1</sup> Pribavljeno 2.09.2022. sa <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=21705>

Budući da je to proučavanje svojstva vlastite okoline, geometrija je relevantna za svako dijete. Učenje geometrije na početnoj razini najbolje se facilitira upotrebom konkretnih manipulativnih modela, crteža te dinamičkog softvera prema potrebi. Kada djeca vide, dodiruju i manipuliraju oblicima, počinju razvijati vještine prostornog zaključivanja. (Howse, T. & Howse, M. 2015.)

Iako je geometrija sastavni dio nastavnog plana i programa, mnogi učenici ne uspijevaju razviti duboko razumijevanje osnovnih geometrijskih koncepata (O'Brien 1999; Clements 2003 prema Howse, T. & Howse, M. 2015. )

Kada matematičke koncepte dobro koristimo u svakodnevnom životu, djeca će cijeniti relevantnost matematike i imati će izazov razviti vještine i kompetencije u ovom području. No, postoji mogućnost da matematika pa tako i geometrija u svakodnevnom iskustvu ostane na početnoj razini. Također, moguće je da su djeca možda na puno višem razvojnem nivou od onog ponuđenog u određenoj aktivnosti stoga neće ostvariti nikakav matematički napredak u takvoj aktivnosti.

Van Hieleova teorija razvoja geometrijskog mišljenja nudi okvir za promišljanje o aktivnostima i njihovoj nastavnoj vrijednosti u poticanju dubokog geometrijskog razumijevanja učenika ( Howse, T. & Howse, M. 2015. )

Uloga odraslih, među njima i odgajatelja je prepoznati potrebe djeteta i osigurati uvjete za daljnji razvoj.

## 2. RANA MATEMATIKA U PREDŠKOLSKOJ DOBI

Pojam "rana matematika" odnosi se na (pred) matematičke vještine i koncepte kojima bi se djeca do osme godine života trebala baviti, a obuhvaća širok raspon osnovnih pojmova kao što je brojenje (1, 2, 3); količina (više, manje); oblici (krug, kvadrat, trokut, prizma, piramida, valjak, stožac, kugla); prostorni odnosi (preko, ispod); mjerenje (visok, nizak; veći, manji); i uzorci (crvena, plava, crvena, plava). Budući da su djeca po prirodi znatiželjna, istražuju te koncepte dok su u interakciji sa svojim okruženjem. (National Research Council, 2009.)

Na primjer, mala djeca istražuju matematiku dok se igraju i grade kule od blokova. U gradnji razvrstavaju blokove po veličini i boji, uočavaju prostorne odnose i razvijaju vještine zaključivanja dok uče koji se oblici mogu postaviti jedan na drugi, koji će srušiti toranj koji su izgradili i kako kombinirati oblike kako bi stvorili poznate predmete. Predškolci broje ili uspoređuju predmete dok se igraju i istražuju uzorke i oblike. Međutim, djeca moraju komunicirati s odraslima kako bi naučila riječi koje predstavljaju osnovne matematičke pojmove koje doživljavaju. Odgajatelji, roditelji i druge odrasle osobe mogu ovu razvojnu podršku uključiti u svoju svakodnevnu rutinu. (Gopnik, Sobel, Schulz & Glymour, 2001.)

Na primjer, dok grade kule ili čitaju knjige s malom djecom, odgajatelji ili roditelji mogu istaknuti i koristiti riječi za označavanje različitih veličina i oblika. Za mlađu i stariju djecu, mogu se koristiti redovite aktivnosti, poput pranja rublja, kao nastavno sredstvo potičući djecu da broje ili razvrstavaju predmete u košari za rublje. Postavljanje stola za jelo još je jedan način da se potakne djecu na razmišljanje o matematičkim pojmovima. (Gopnik et al., 2001.)

### 2.1. Sadržaj rane matematike

Kao što smo prethodno naveli koncepti matematike se protežu od brojeva, uzoraka, geometrije, analize podataka do mjerenja. Broj, na primjer, uključuje koncepte kao što su riječi za brojanje ('jedan, dva, tri,...'), redni položaji ('prvi, drugi, treći,...'), ideju kardinalne vrijednosti (koliko ih ima?), te razne operacije na broju poput zbrajanja i oduzimanja. Razmotrimo proces brojenja tj. određivanja količine u (diskretnom) skupu. Prije nego možemo odrediti koliko nečeg ima u skupu objekata, prvo moramo znati riječi za brojenje ('jedan, dva, tri,...'), znati ih u pravilnom redosljedu, primijeniti načelo pridruživanja 1-1



(jednom predmetu je pridružen jedan broj) te načelo kardinalnosti (zadnji pridružen broj odgovara ukupnoj količini). (Copley, 2010.)

U daljnjem tekstu pojasniti ćemo što mislimo pod pojmovima oblik i prostor.

Geometrija je dio matematike koji proučava obilježja točaka, linija, kutova, površina, tijela i sam odnos između njih. Geometrijski oblik, dio je ravnine omeđen s konačno mnogo dužina ili krivulja. Geometrijski oblici se mogu mijenjati po položaju, veličini i izgledu. (Čižmešija, Svedrec, Radović & Soucie, 2010.)

Oblici definiraju granicu objekta i mogu se razlikovati na mnogo načina na temelju njihovih svojstava. Oblici su definirani granicom koja je napravljena kombiniranjem krivulja, točaka i segmenata linija. Svaki oblik ima naziv ovisno o strukturi. Pod oblike svrstavamo geometrijske likove i geometrijska tijela. Oblici se klasificiraju kao otvoreni/zatvoreni i dvodimenzionalni/trodimenzionalni. (Čižmešija, Svedrec, Radović & Soucie, 2010.)

U članku “Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole”, autori podrazumijevaju prostorni zor kao: “...intuitivni osjećaj za oblike u prostoru, kao i osjećaj za geometrijske aspekte svijeta koji nas okružuje i oblike koje formiraju objekti oko nas. On uključuje koncepte tradicionalne geometrije, a osobito sposobnost raspoznavanja, vizualnog prikazivanja i transformacije geometrijskih oblika. S druge strane, u njega su uključeni i za našu nastavu geometrije nestandardni pogledi na dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike, poput popločavanja ravnine i prostora, presavijanja papira, crtanja projekcija geometrijskih likova i tijela u kvadratnoj i trokutastoj mreži točaka... Konačno, razvijeni prostorni zor podrazumijeva i sposobnost misaone vizualizacije objekata i prostornih odnosa (npr. misaono okretanje objekta) i snalaženje s geometrijskim opisima objekata i njihovog položaja.” (Čižmešija, Svedrec, Radović & Soucie, 2010.)

Nadalje, reći ćemo nešto i o samom konceptu brojevnog sustava te izazovima usvajanja koncept broja kod djece.

Brojevni sustav sa bazom deset je najrašireniji sustav - stoga je najprisutniji u govoru/jeziku. Slijedom toga, unatoč potrebi za pamćenjem prvih deset brojeva, učenje brojanja nije samo

čin pamćenja. Uključuje učenje građevnih blokova elegantnog uzorka, izvedenog iz sustava baza deset, koji jednom shvaćen, dopušta brojanje do vrlo visokih brojeva uz malo dodatnog pamćenja. Na primjer, riječi za brojanje organizirane su u skupine desetica i jedinica, a nazivi za desetice su izvedeni iz naziva jedinica. Nakon što su poznati nazivi za desetice (deset, dvadeset, trideset,...), riječi jedinice (jedan, dva, tri,...) lako se mogu dodati. Rezultat je jednostavan i elegantan uzorak. (Copley, 2010.)

Međutim, kada se djeca prvi put pozabave činom brojenja, sami elementi koji odraslima čine sustav brojenja tako jednostavnim još nisu poznati. Djeca se moraju boriti s pamćenjem prvog niza brojeva i pokušajem razumjeti zašto je potreban fiksni redosljed prije nego što njegova nužnost i korisnost postanu očiti u eleganciji sustava. Nakon što su riječi za brojanje poznate, mogu se koristiti za nabranje ili 'prebrojavanje' grupe objekata. (Copley, 2010.; Fuson, 1988.)

Prebrojavanje također uključuje niz temeljnih koncepata koje mnogi odrasli uzimaju zdravo za gotovo. Jedna je ideja da skupina objekata koje treba prebrojiti može sadržavati različite objekte – konkretne fizičke objekte, i one koji to nisu (kao što su ideje, zvukovi). Ali vjerojatno najteža ideja s kojom se dijete može uhvatiti u koštac kada broji skup predmeta brojevne riječi ne predstavljaju nazive/imena objekata koji se broje, već opisuju količinu objekata u skupu. (Copley, 2010.; Fuson, 1988.; Gelman & Gallistel, 1978.)

Dijete mora shvatiti da se pokazivanjem na predmete i izgovaranjem 'jedan, dva, tri' u ključnom pogledu razlikuje od pokazivanja na njih i izgovaranja 'okruglo', 'plavo' i 'drvo'. Izgovorene riječi se odnose na poredak - broj u rednom smislu, dok zadnja izgovorena brojka poprima i kardinalno značenje - predstavlja količinu. A to je tek početak dubine ideja koje se nalaze u domeni brojeva. Ostala područja matematike sadrže jednako duboke ideje i složenost. (Marendić, 2010.)

## **2.2. Važnost rane matematike**

Značajna količina istraživanja pokazuje povezanost između kompetentnosti u ranoj matematici i uspjeha u školi, čak i nakon kontrole obiteljskih karakteristika, ranog kvocijenta inteligencije, postignuća u čitanju i drugih čimbenika. Zapravo, rane matematičke vještine mogu biti najjači prediktor kasnijeg uspjeha i u čitanju i u matematici. (Gelman &

Butterworth, 2005.; Watts, Duncan, Siegler, Davis-Kean, 2014.; Brannon, 2005.)

Neadekvatan razvitak matematičkih vještina, međutim, počinje rano i evidentan je do polaska djece u školu. Nažalost, djeca koja krenu u osnovnu školu sa slabim matematičkim vještinama vjerojatno će zaostajati za svojim vršnjacima u kasnijim razredima. Watts, Duncan, Siegler i Davis-Kean (2014.) proveli su istraživanje u kojem su mjerili matematičke vještine djece prije polaska u škole i u istraživanju su otkrili prediktivne moći rane intervencije u matematičkim sposobnostima.

Longitudinalno istraživanje Watta i suradnika (2014.) uspoređuje matematičke vještine mjerene kod djece u dobi od 4 i pol godina s postignućima adolescenata u matematici. Tim radom, otkrili su da predškolska matematička sposobnost predviđa matematička postignuća do 15. godine (uzorak adolescenata), čak i nakon što se uzme u obzir nekoliko varijabli poput kognitivnih vještina, ranog čitanja i pisanja te karakteristika obitelji i samog djeteta. Štoviše, utvrdili su da jačanje matematičkih sposobnosti između 4 i pol godine do polaska u prvi razred, još intenzivniji prediktor matematičkih postignuća adolescenata. Tim se rezultatima pokazala važnost matematičkog znanja prije vrtića i ranog učenja matematike za kasnija postignuća. (Watts, Duncan, Siegler, Davis-Kean, 2014.)

Osim toga, djeca koja su najmanje pripremljena za matematiku, kada krenu u osnovnu školu, obično su iz manjinskih i obitelji s niskim primanjima. Ovi čimbenici sugeriraju da poboljšanje dugoročnih ishoda za svu djecu može ovisiti o izlaganju ranijim matematičkim konceptima prije polaska u školu. (Watts, Duncan, Siegler, Davis-Kean, 2014.; Claessens, Duncan & Engel, 2009.; National Research Council, 2009.)

### **2.3. Povezanost rane matematike sa ranom pismenošću**

Uobičajena zabrinutost je da podrška ranoj matematici može značiti odvajanje vremena od nečega drugog, kao što je rano opismenjavanje. Ipak, to ne mora biti slučaj. Razvoj ranih matematičkih i ranih vještina pismenosti isprepleteni su, a napor da se podrže oboje mogu se odvijati istovremeno (Brannon, 2005.). Zapravo, kada se matematika poučava paralelno s drugim sadržajima, kao što je čitanje, djeca uče više matematike nego što bi to učinila da ih se poučava samo matematikom (Claessens et al., 2009.).

Djeca uče matematiku i jezik u sličnoj progresiji. Počevši od djetinjstva, jezične i pismene vještine razvijaju se tijekom vremena kako djeca grade svoj vokabular, duljinu rečenice i složenost rečenice. Djeca uče kako izraziti svoje ideje riječima izgrađujući svoj vokabular, svoje razumijevanje gramatike i svoju sposobnost korištenja dužih, složenijih rečenica. Rano učenje matematike uključuje sličan napredak kao što djeca u početku uče osnovni matematički vokabular, a zatim kako prepoznati matematiku u svijetu oko njih, a s vremenom nauče kako izraziti složenije matematičke koncepte kao na primjer mjerenja, geometriju i zaključivanje. Čitanje knjiga, pričanje priča i korištenje matematičkog vokabulara su laki, učinkoviti načini za integraciju i promicanje razvoja ranih matematičkih koncepata i ranih vještina pismenosti. (Claessens et al., 2009.; Watts et al., 2014.)

#### **2.4. Razumijevanje dječjih numeričkih kompetencija**

Tijekom posljednja tri desetljeća, naše razumijevanje dječjih numeričkih kompetencija u nastajanju znatno je poboljšano. Na primjer, djeca već predškolske dobi pokazuju gotovo intuitivno znanje o veličinama i brojevima. Više puta se pokazalo da su već prije eksplicitnog poučavanja u školi; djeca sposobna recitirati brojevne riječi i više od toga, čini se da imaju inherentno znanje o principima brojenja (Fuson, 1988.; Gallistel & Gelman, 1978.).

U istraživanju Gallistela i Gelmana (1992.), željeli su dokazati mogu li se čimbenici fonološke svijesti, sposobnosti brojenja, fine motorike, vizualno-prostorne percepcije, motoričke koordinacije, kao i dob ili spol djece smatrati mogućim prediktorima za kasnije matematičke vještine. Njihova analiza podataka pokazala je da samo fonološka svijest, sposobnosti brojenja i dječja vizualno-prostorna percepcija predstavljaju značajne prediktore upravo za osnovne numeričke i magnitudne kompetencije kod predškolske djece. U drugom koraku testirali su jesu li ti prediktori isti ili različiti za dvije podskupine iz odabranog uzorka djece. Otkrili su da djeca s različitim vještinama (u pogledu fonološke svijesti) mogu odabrati različite strategije za stjecanje novih kompetencija; stoga su različiti prediktori relevantni za osnovne numeričke kompetencije i kompetencije veličine.

Iako nije iznenađujuće saznati da predškolci pokazuju znanje o veličini i numeričke vještine prije nego što uđu u formalno matematičko obrazovanje, nešto su začuđujući nalazi koji upućuju na to da bi već dojenčad mogla imati urođenu sposobnost razlikovanja skupova objekata na temelju njihove brojčane različitosti i štoviše, čini se da demonstriraju očekivano

ponašanje kao odgovor na kršenje zbrajanja i oduzimanja (npr. Wynn, 1992.).

Dok su nalazi Wynn (1992.) bili ograničeni na male skupove predmeta koji impliciraju da su bebe u dobi od 5 do 6 mjeseci sposobne razlikovati skupove objekata samo do tri ili četiri predmeta, daljnji rad Xua i Spelkea (2000.) pokazali su da dojenčad od 6 mjeseci također može razlikovati veće skupove objekata pod uvjetom da je omjer između skupova koji se trebaju diskriminirati dovoljno velik (tj. dojenčad je uspjela razlikovati 8 od 16 objekata, ali nije uspjela u omjeru od 8 –12). Štoviše, dojenčad u dobi od 9-11 mjeseci pokazuju osjećaj uobičajenosti (tj. veće/manje od odnosa; Brannon, 2005).

Razvijanje dječjih numeričkih kompetencija povezano je i sa geometrijskim kompetencijama. Poticanjem domene geometrijskih kompetencija, razvijaju se i numeričke. (Ten Braak, Lenes, Purpura, Schmitt & Størksen, 2022.)

## **2.5. Razvijanje geometrijskog mišljenja**

Početna istraživanja o tome kako djeca razvijaju koncepte oblika i prostora oslanjaju se na Piaget-ovu teoriju konstruktivizma. Prema njoj potrebno je osigurati mnoštvo raznolikih praktičnih iskustava djetetu kako bi dijete konstruiralo koncept oblika. Piaget je došao do zaključka da se u početku formiranja koncepata oblika prvo spoznaju topološka svojstva – opisivanjem načina kako se oblici mogu transformirati rastezanjem ili stezanjem. Iz topološke perspektive trokut možemo rastezati i stiskati dok ne postane krug. Oba oblika imaju isto svojstvo da su zatvorena, tj. crtanje počinje i završava u istoj točki. Otvoreni oblici kao što je znak križa se preciznije crtaju, premda nije vjerojatno da će linije biti ravne. Budući da mala djeca imaju poteškoća sa preciznim crtanjem dvodimenzionalnih oblika, pri čemu možda ne razlikuju krug od na primjer kvadrata, Piaget je zaključio kako djeca vide sve zatvorene oblike na isti način.

Sredinom dvadesetog stoljeća dvoje nizozemskih matematičara Pierre i Diene van Heile-Geldof identificiralo je pet razina razumijevanja koja nam omogućuju razumjeti kako djeca razumiju oblike i oblike u prostoru. Van Heile-ovi su bili Montessori učitelji i razine koje su opisali mogu pomoći praktičarima u razmišljanju o razvoju učenja kod male djece. (Montague-Smith, Cotton, Hansen & Price, 2017.)

Tip pet razina su: vizualizacija, analiza, apstrakcija, dedukcija i strogost.

Van Hieleove razine imaju određena svojstva za razumijevanje geometrije. Prije svega, stupnjevi imaju svojstvo fiksnog niza. Pet razina je hijerarhijski, što znači da djeca moraju proći kroz razine redom. Dijete se ne može uklopiti u razinu N bez da je prošlo prethodnu razinu (N-1). Djeca se ne mogu uključiti u geometrijsko razmišljanje na višoj razini bez prolaska nižih razina. (Van Hiele, 1999.)

Drugo svojstvo je susjednost razina. Na svakoj razini mišljenja ono što je bitno u prethodnoj razini postaje vanjsko u postojećoj razini. Za prijelaz s jedne razine na sljedeću potrebno je individualno razumijevanje i promišljanje geometrijskih ideja, a ne biološko sazrijevanje.

Treće, svaka razina ima svoje vlastite simbole i lingvističke odnose za povezivanje tih simbola. Ovo svojstvo je razlika između faza. Na primjer, kada odgajatelj koristi jezik za višu razinu razmišljanja od razine razmišljanja djece, djeca ne mogu razumjeti koncepte i pokušavaju samo zapamtiti dokaze i učiti napamet. U ovom slučaju dolazi do pogrešne komunikacije. (Van Hiele, 1999.)

U nastavku opisujem detaljnije svakom razinu.

### ***2.5.1. Razina 0 - Vizualizacija***

Na ovoj razini djeca koriste svoju vizualnu percepciju i neverbalno razmišljanje. Prepoznaju geometrijske figure po njihovom obliku kao “cjelina” i uspoređuju figure sa njihovim prototipovima svakidašnjih stvari (Npr. “Izgleda poput vrata” ili “Izgleda kao sunce”).

Na primjer, brojevni pravac u ovoj fazi mogao bi se definirati kao skup realnih brojeva u domeni realnih brojeva. Vektori i matrice mogu se promatrati kao osnovni objekti u domeni linearne algebre. Također ih mogu kategorizirati; “To je / to nije ” kao što to prikazuje Slika 1.. Koriste se jednostavnim jezikom te ne identificiraju svojstva geometrijskih figura. (Van Hiele, 1999.)

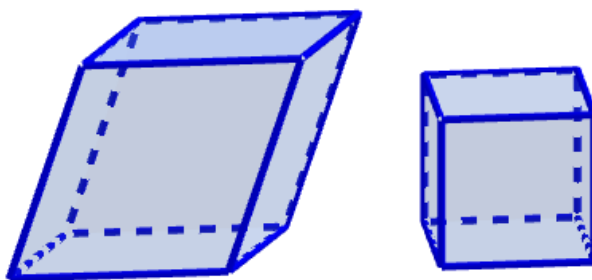


**Slika 1.:** dječja kategorizacija trokuta s lijeve i “ne trokuta” s desne strane

### **2.5.2. Razina 1 - Analiza**

U fazi analize djeca počinju analizirati objekte koji su bili samo vizualno percipirani na prethodnoj razini, identificirajući njihove dijelove i odnose među tim dijelovima. Oni se fokusiraju na svojstva tih objekata. U stereometriji, faza analize je mjesto gdje djeca počinju uočavati svojstva povezana s različitim oblicima ili konfiguracijama. Kocka će sada postati tijelo: sa 6 jednakih strana (oblika kvadrata); čije su suprotne strane paralelne plohe; koje ima 12 jednako dugih bridova i 8 vrhova kutova, čiji su svi unutarnji kutovi pravi kutovi. Međutim, u ovoj se fazi ne pretpostavlja da će djeca tražiti logičke odnose između svojstava kao što je saznanje da je dovoljno paralelepiped (prizma kojoj su sve strane paralelogrami) definirati kao tijelo s paralelnim suprotnim stranama i svim ostalim svojstvima koja slijede. Također se ne pretpostavlja da će djeca razmišljati o kvadru kao posebnoj vrsti paralepipeda. Stoga će djeca prepoznavati oblike i tijela na temelju cjelovitosti njihovih svojstava. Drugim riječima, odnosi između oblika i konfiguracija ostaju samo na popisu svojstava koja imaju. (Van Hiele, 1999.)

U ovoj fazi, ako se od djeteta traži da opiše oblik ili geometrijsko tijelo, opis bi se temeljio na svojstvima predmeta. U isto vrijeme, ako bi se od djece tražilo da reproduciraju oblik ili geometrijsko tijelo na temelju popisa svojstava, oni bi to mogli učiniti. Djeca bi također mogla provjeriti figure i tijela analizirajući njihova svojstva. U ovoj fazi dijete može prepoznati međudnos između oblika i njihovih svojstava. Na primjer, znajući svojstva paralepipeda, dijete bi moglo zaključiti da je kvadar posebna vrsta paralepipeda, prikazano na Slici 2. (Van Hiele, 1999.)



**Slika 2.:** prikaz pralelopipeda i kocke - kao podvrste paralepipeda (izrađeno u GeoGebri)

### **2.5.3. Razina 2 - Apstrakcija - Informalna dedukcija**

Ovaj stupanj se postiže kada dijete zna operirati s odnosom likova i tijela i može primijeniti podudarnost geometrijskih likova za dokazivanje određenih svojstava ukupne geometrijske konfiguracije čiji su sukladni likovi dio. Djeca postaju svjesna dovoljnog i nužnog uvjeta za koncept nekog lika ili oblika. Dijete se uklapa u ovu razinu nakon postizanja prethodnih razina (vizualizacije i analize). (Van Hiele, 1999.)

Na ovoj razini više pozornosti pridaje se odnosima među svojstvima. Drugim riječima, u ovoj fazi fokus je na “obilježjima skupova svojstava”. U ovoj razini prema odnosu između svojstava objekata, djeca pokušavaju ta svojstva grupirati u podskupine. Nastoje saznati koja su to minimalna svojstva potrebna za opis početnih osnovnih elemenata. Matematički odnosi između svojstava glavni su fokus u ovoj fazi. Razumijevanje i pronalaženje tih odnosa je vrsta neformalne dedukcije. (Van Hiele, 1999.)

Na primjer, u ovoj fazi djeca bi počela poboljšavati ideju da neke operacije nad realnim brojevima slijede iz drugih operacija na skupovima poput prirodnih brojeva. Zatim bi počela stvarati pristup shvaćajući aksiom realnih brojeva kao sustavno komutativno polje. Ali oni ne mogu dati dokaze za takvo neformalno promatranje. (Van Hiele, 1999.)

Na ovoj razini djeca mogu davati neformalne argumente za dokazivanje geometrijskih rezultata. Počinju deduktivno razmišljati o geometriji i to je jedan od važnih aspekata sadašnje faze. Ovdje se mogu koristiti neka jednostavna pravila jer djeca slijede samo jednostavnu logiku. Na primjer, ako je  $A=B$  i  $B=C$  tada je  $A=C$ . Većina prilagođene djece na razini neformalne dedukcije bila bi u stanju opravdati argumente koje su prije predstavili neformalnim logičkim odnosima. Stoga na ovoj razini mogu dati neformalne logičke odnose i koristiti ih o ranije identificiranim svojstvima. Sve u svemu, djeca sada počinju prepoznavati značaj dedukcije i logike u geometriji. (Van Hiele, 1999.)

#### ***2.5.4. Razina 3 - Dedukcija***

Na ovoj razini djeca počinju konstruirati, a ne samo pamtiti dokaze. U stanju su pronaći razlike između istih dokaza. Cilj prethodne razine bio je otkrivanje odnosa među svojstvima baznog elementa od strane djece. Na razini 3 te se relacije koriste za izvođenje teorema o osnovnim elementima na temelju zakona deduktivne logike. Glavna svrha treće razine je



organizacija iskaza o odnosima s razine 1 i 2 u deduktivne dokaze. (Van Hiele, 1999.)

Djeca su spremna prihvatiti sustav aksioma, teorema i definicija. Ona mogu stvoriti dokaze iz aksioma i samo koristeći modele ili dijagrame kako bi poduprli svoje argumente. Stoga djeca mogu formalno dokazati ono što su prethodno dokazali na razini 3 koristeći dijagrame i neformalne argumente. Također počinju razlikovati potrebu za nedefiniranim terminima u geometriji, što je vrlo težak koncept za razumijevanje u čisto logičkom sustavu. (Van Hiele, 1999.)

Još jedna točka u ovoj fazi je da djeca počinju biti svjesnija razumjeti i identificirati razlike između kontrapozitiva, implikacija i teorema. Ona također mogu dokazati ili opovrgnuti bilo koji od tih odnosa. Na ovoj razini djeca postaju svjesna odnosa i veza između teorema i grupiraju ih na odgovarajući način. (Van Hiele, 1999.)

#### ***2.5.5. Razina 4 - Strogost***

U četvrtoj razini koja se zove strogost, tradicionalno su djeca hiperanalizirala deduktivne dokaze iz razine 4. Odnosno, pronalazili su odnose između dokaza. Ova razina gleda na identificirane organizacije prethodne razine. Na primjer, na ovoj razini postavila bi se pitanja “jesu li dokazi konzistentni jedan s drugim”, “koliko je jaka veza opisana u dokazu” i “kako se uspoređuju s drugim dokazima”. Razina strogosti uključuje duboko propitivanje svih pretpostavki koje su se pojavile prije. (Van Hiele, 1999.)

Ova vrsta ispitivanja također uključuje usporedbu s drugim matematičkim sustavima sličnih kvaliteta. Na primjer, na razini 4, ako bismo razmatrali realne brojeve, počeli bismo ih uspoređivati kao polje s drugim poljima općenito. Pošteno je reći da ovu razinu obično polažu samo profesionalni matematičari. (Van Hiele, 1999.)

#### ***2.5.6. Van Heileove faze učenja***

Napredak s jedne razine na sljedeću najbolje je olakšati kroz strateški planirane aktivnosti (Van Hiele-Geldof 1984; Clements 2003. prema Howse, T. & Howse, M. 2015).

Prema autorima Howse, T. i Howse, M. (2015.) Van Hiele su smatrali da učenici razvijaju

duboko razumijevanje svih geometrijskih pojmova kroz sličan proces učenja na svakoj od razina. Ta progresija koja dovodi do prelaska na višu razinu ima 5 faza koje su otprilike, ali ne nužno, u slijedu: informacija, usmjerena orijentacija (vođeni zadaci), objašnjenje, slobodna orijentacija (zadaci otvorenog tipa) i integracija.

Tablica 1: Okvir Van Heileovih faza učenja (Howse, T. & Howse, M.; 2015.)

Faza	Opis
Informacija	Učenici razvijaju vokabular i koncepte za određeni zadatak. Učitelj procjenjuje učenikovo tumačenje/obrazloženje i odlučuje kako nastaviti s budućim zadacima.
Usmjerena orijentacija	Učenici aktivno sudjeluju u aktivnosti vođenoj od strane nastavnika. Rade s razvojem spoznaja iz prethodne faze kako bi ih razumjeli i ustanovili veze među njima.
Objašnjenje	Učenicima se daje mogućnost verbaliziranja njihovog razumijevanja. Učitelj vodi raspravu.
Slobodna orijentacija	Učenici su izazvani zadacima koji su složeniji i otkrivaju vlastite načine dovršavanja svakog zadatka.
Integracija	Učenici sažimaju ono što su naučili, stvarajući pregleda koncepta kojim su se bavili.

U nastavku rada navodimo primjer aktivnosti autora Howse, T. i Howse, M. provedene s djecom vrtićke dobi koja prati Van Heileove faze učenja s ciljem poticanja razvoja vještina prostornog zaključivanja djece.

U sklopu prve faze (informacija), autori su htjeli procijeniti prethodno znanje učenika dok im kroz aktivnosti pomažu razvijati specifičan vokabular za atribute danih oblika. Prve aktivnosti su bile aktivnosti sortiranja s kojima se pomoglo učenicima u njihovom istraživanju općih karakteristika geometrijskih tijela (boja, oblik, veličina, broj bridova, vrsta kutova).

U sklopu druge faze (usmjerena orijentacija), autori su za sljedeću aktivnost pripremili zadatak u kojem su učenici trebali kategorizirati atribute oblika u skupove po dva komada koji

imaju jedan različit atribut; daljnje aktivnosti će biti kompleksnije od prethodne, odnosno, tražit će se oblici s dvije, tri ili više različitih svojstava. Cilj ove aktivnosti je bio produbiti razumijevanje osnovnih geometrijskih oblika i poticati učenike na stvaranje smislenih veza između različitih značajka oblika.

U trećoj fazi (objašnjenje), provodila se aktivnost u kojoj su autori ponudili učenicima Vennove dijagrame s kojima je fokus bio na poticanju dijaloga i objašnjenja prilikom svrstavanja oblika određenih atributa.

Četvrta faza (slobodna orijentacija) započela je nakon razmatranja razumijevanja svojstva oblika i Vennovog dijagrama. Autori su smatrali da je korisna aktivnost dati učenicima mogućnost kreiranja vlastitih Vennovih dijagrama. Ova aktivnost je poboljšala sposobnost njihovih učenika u artikuliranju svojeg razumijevanja geometrijskih koncepata. Ova aktivnost im je omogućila da kritički razmišljaju o naučenim pojedinačnim atributima oblika.

U petoj fazi (integracija), učenici su igrali igru sličnu "Scrabble-u" (igru riječima u kojoj je cilj skupiti poene ispunjavanjem ploče riječima u stilu križaljki). Umjesto ploče, prostor za igru je Vennov dijagram s dva ili tri kruga koja se sijeku. Cilj aktivnosti je bio imati najmanji broj preostalih oblika koji se nisu mogli svrstati u Vennov dijagram. Tijekom ove aktivnosti, autori navode kako su učenici razmišljali o atributima blokova dok su kritizirali razmišljanja drugih kolega. Ova igra je omogućila učenicima da intrizično i ekstrizično razmišljaju o odnosi među atributima blokova te iako je igra bila malo kompleksna i izazovna - autori tvrde da su uvidjeli da su učenici usvojili koncepte.

### 3. OTKRIVANJE OBLIKA I PROSTORA

Od trenutka rođenja, djeca istražuju i uče o svijetu kroz oblik i prostor. Oblici su im posebno od neposredne važnosti i djeca instinktivno reagiraju na raspored oblika koji čine ljudsko lice. Oči, nos i usta su oblici koji kada se spoje čine najvažniju vezu u djetetovom svijetu - majku ili oca. Dijete uči o oblicima kroz svoja osjetila, dodirujući i istražujući. (Slunjski, 2012.)

U ranim mjesecima djeca doživljavaju ograničen prostor i otvoren prostor. Kada se jednom pokrenu, otvara se prostor jer počinju puzati i izlaziti iz soba, pokušavaju se penjati i spuštati stepenicama, skrivati se ispod stolova ili iza zavjesa. Razvijanje osjećaja za prostor daje djeci svijest o sebi u odnosu na druge ljude i predmete oko sebe. U ustanovi ranog i predškolskog odgoja i obrazovanja svaki dan postoji mnogo mogućnosti za rad s oblikom i prostorom. (Slunjski, 2012.)

Djeca uče o geometriji i drugim matematičkim pojmovima kroz praktična iskustva. Materijali koje mogu dodirivati i kojima manipuliraju posebno su korisni, kao što su blokovi, kutije, masa za oblikovanje i slično. U radu s mekim i tvrdim materijalima djeca intuitivno uče vještine i znanja iz inženjerstva i arhitekture. Oni znaju koliko daleko mogu savijati kartonske kutije i koliko su čvrsti i stabilni blokovi dok grade toranj. Nešto tako jednostavno kao što je ulijevanje vode u šalice različitih veličina i razmišljanje o tome koja će čaša držati više je skromna aktivnost koja zapravo uključuje procjenu, mjerenje i prostorni osjećaj. Matematički jezik je najrelevantniji za dijete kada je povezan sa stvarnom i smislenom aktivnošću. (Slunjski, 2012.; Ginsburg, 2006.)

U sklopu odgojno obrazovnog procesa djece, za djecu od treće do osme godine postoji niz očekivanih ishoda u sklopu njihovog razvijanja matematičkih vještina. Očekuje se da će moći prepoznati, imenovati, graditi, uspoređivati i sortirati dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike; opisati attribute i dijelove dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika te moći slagati i razlagati dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike. Također se pretpostavlja da će djeca moći opisivati, imenovati i interpretirati relativne pozicije u prostoru; opisivati, imenovati i interpretirati smjer i distancu prilikom navigiranja u prostoru te moći pronaći i imenovati lokaciju u jednostavnim odnosima poput "Lopta je *u blizini*

stola.”. Nadalje, očekuje se da će moći implementirati transformacije i koristiti simetriju za analiziranje matematičkih situacija, konkretnije, prepoznavati i koristiti klizanje (translaciju), zakretanje (rotacija u ravnini) i prevrtanje (rotacija u prostoru) objekata/oblika te prepoznati i kreirati simetrične oblike. Naposljetku, očekuje se da će djeca koristiti vizualizaciju, prostorno razmišljanje i geometrijsko modeliranje prilikom rješavanja problema, a to uključuje stvaranje mentalne slike geometrijskih oblika koristeći prostorno pamćenje i prostornu vizualizaciju; prepoznavanje i predstavljanje oblika iz različitih perspektiva; povezivanje ideje u geometriji s idejama o broju i idejama mjerenja; prepoznavanje geometrijskih oblika i strukture u njihovom okruženju i određivanje njihovog položaja. (Ten Braak, Lenes, Purpura, Schmitt & Størksen, 2022.)

### ***3.1.1. Percepcija različitosti i istosti***

U dobi od otprilike tri i četiri godine djeca uče nekoliko aspekata oblika, dvodimenzionalnih (2-D) i geometrijskih tijela (3-D). Mala djeca mogu lako vidjeti ili uočiti razlike između različitih oblika. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

Na primjer, na pitanje jesu li dvodimenzionalni oblici na *Slici 3.* različiti, djeca će se brzo složiti da jesu.



**Slika 3.:** *Dva različita oblika*

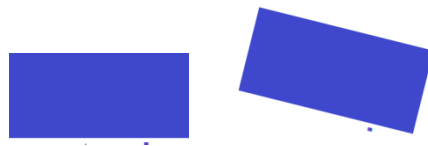
Oni također mogu lako razlikovati trodimenzionalne oblike, na primjer, između pravokutne prizme (poput knjige) i kugle (poput lopte), ili između kugle i kocke (kao blok sa šest kvadrata). Jasno je da mala djeca mogu vidjeti razlike između trokuta i pravokutnika, te između knjiga i loptica. Možda čak znaju i nazive trokuta i pravokutnika. Ali u isto vrijeme, možda neće moći analizirati osnovu svoje diskriminacije. Možda nemaju znanja o svojstvima trokuta i pravokutnika. Možda ne razumiju, na primjer, da trokut mora imati tri strane, da je zatvoren lik ili da su obje figure poligoni. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

Ukratko, sposobnost razlikovanja znači samo da djeca vide da oblici izgledaju drugačije. U

isto vrijeme, djeca možda ne znaju ništa važno o njima. Moramo razlikovati gledanje i razmišljanje te percepciju i misli.

Mala djeca mogu vidjeti da su dva pravokutnika perceptivno ista ili identična (kongruentna; dva sukladna objekta su istog oblika i veličine, ali njihova orijentacija i pozicija mogu biti različiti). Čak bi mogli vidjeti podudarnost ako je jedan od pravokutnika nagnut malo u stranu (ali ne previše). (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

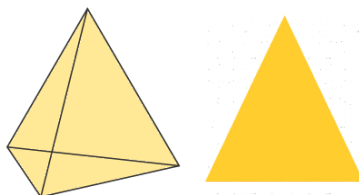
**Slika 4.** prikazuje primjer.



**Slika 4.:** kongurentni pravokutnici različito rotirani

Identificiranje istovjetnosti, u smislu kongruentnog oblika, nije teško za malu djecu, koja su stručni u percepciji, barem onoga što je na površini. Njihova percepcija je uglavnom neverbalna i izravna. Imajte na umu da jezik nije bitan za bilo koju od ovih prosudbi: djeca mogu vidjeti da su oblici identični, a da ih ne mogu imenovati. Djeca također mogu oblicima dati pogrešna imena, ali i dalje točno percipiraju identičnost (i razliku). (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

**Slika 5.** ilustrira zanimljivu komplikaciju. Ponekad se čini da djeca ne prepoznaju jasnu razliku. Na primjer, trogodišnjak bi mogao reći da su oblici na **Slici 5.** isti jer oba imaju "šiljate vrhove". (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)



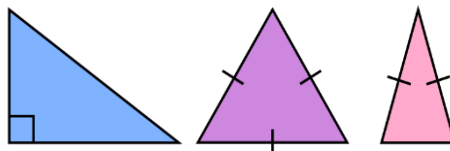
**Slika 5.:** Dva različita oblika sa „sličnim“ vrhovima

Znači li to da dijete ne vidi razliku između oblika? Nije nužno. Dijete vjerojatno vidi razlike, ali misli da su oblici ipak isti. Ako odrasla osoba pita jesu li oblici uopće različiti, dijete bi moglo reći da jedna ima tri strane, a druga četiri, ali one su iste jer svaka ima onaj "šiljasti vrh". Dakle, dijete vidi razliku u percepciji, ali misli da su oblici isti jer svaki dijele vrh na

vrhu. Zapravo, dijete je sasvim u pravu: iako su oblici različiti, isti su u svojstvu koje dijete opisuje. Ovo je jedan od razloga za intervjuiranje djece u pokušaju da se otkrije razmišljanje koje je u osnovi njihovih otvorenih odgovora. Dijete može reći "isto", ali također razumije da su oblici različiti u drugom pogledu. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

Djeca trebaju ići dalje od percipiranja istosti i različitosti. Moraju naučiti klasificirati objekte koji su slični (matematički oblik može biti sličan u osnovnom obliku, ali različit u veličini), za razliku od kongruentnih, u ključnim aspektima. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

Neke su klasifikacije lakše za malu djecu od drugih. Na primjer, mogu vidjeti da kvadrati različitih veličina idu zajedno. Mogu identificirati prototipne, odnosno standardne uobičajene trokute, poput onih na *Slici 6.*, bez obzira na veličinu. Opet, to se može učiniti bez poznavanja imena. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)



**Slika 6.:** Pravokutni, jednakostranični i jednakokračni trokut

### **3.1.3. Imenovanje**

Naravno, djeca moraju naučiti točno imenovati objekte. Imena su korisna na nekoliko načina: omogućuju komuniciranje s drugima ("Ovo je trokut.") i upućuju na kategoriju koju treba analizirati ("Ovo se zove trokut, a ovo je isto tako trokut. Po čemu su slični?"). Djeca predškolske dobi znaju tisuće imena, uključujući posebna imena poput Brontosaurus ili ezoterična imena crtanih likova ili igračaka ili akcijskih figura. S obzirom na njihovu sposobnost da apsorbiraju jezik, mala djeca bi trebala imati ne zamjetne poteškoće u učenju imena kao što su pravokutna prizma ili peterokut. Ali odrasla osoba uvijek treba imati na umu da su imena, iako su potrebna, površna. Djeca moraju naučiti svojstva oblika, a ne samo kako ih sortirati ili imenovati.

### **3.1.4. Razumijevanje**

Nadalje, razumijevanje je višestruko. Djeca moraju naučiti analizirati oblike, identificirati

njihova definirajuća svojstva i govoriti o njima. Trebaju naučiti što trokut čini trokutom i po čemu se trokut razlikuje od kvadrata. Moraju naučiti da je kvadrat podrazred pravokutnika. Kao što je već spomenuto, djeca mogu lako naučiti kategorizirati prototipne oblike. Uče da su jednakostranični, jednakokračni i pravokutni trokuti trokuti. U isto vrijeme, djeca možda ne znaju da je dugi, tanak trokut, kao na Slici 6, također legitimni član obitelji trokuta, te da svi trokuti bilo koje boje mogu biti mali ili veliki, nagnuti na bočno ili ležeći na vodoravnoj podlozi. Veličina, boja i orijentacija nisu važni kada je cilj identificirati oblike koji su istog tipa. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)



**Slika 7.:** *Primjer neprototipnog trokuta*

Glavni izazov djeteta je stjecanje eksplicitnog znanja o svojstvima oblika. Djeca moraju razumjeti da trokut ima određena svojstva definiranja, a kvadrat druga i da su ti oblici nepromjenjivi u odnosu na promjene veličine, orijentacije i boje. Također moraju znati govoriti o oblicima; objasniti zašto je trokut trokut čak i ako nije prototip. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

Ograničeno dječje razumijevanje bitnih i nebitnih svojstava može djelomično proizaći iz ograničenog niza oblika koje vide. Djeca su često izložena prototipnim oblicima u knjigama i igračkama. Ako slikovnica predstavlja trokut, on će vjerojatno biti jednakostraničan ili jednakokračan. Igračke za sortiranje oblika također uključuju prototipove, u ovom slučaju trodimenzionalne, poput jednakostranične trokutaste prizme. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

S obzirom na to da se djeci rijetko prezentiraju oblici koji nisu prototipovi, odrasli bi trebali izložiti djecu i podučiti ih osnovnim svojstvima oblika, eksplicitno navodeći razloge zašto je jedan oblik trokut, a drugi peterokut. Kao i u drugim područjima, odrasli trebaju pomoći djeci matematizirati svoje znanje o oblicima, odnosno razviti eksplicitnu svijest o formalnoj matematici. Djeca moraju naučiti kako razmišljati i eksplicitno govoriti o matematičkim svojstvima kao što je broj vrhova i strana koje definiraju lik. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)



### 3.1.5. Slaganje i razlaganje oblika

Djeca također trebaju istraživati i učiti o rastavljanju oblika i korištenju oblika za konstruiranje drugih oblika. Na primjer, ako je cilj stvoriti kvadrat iz dva trokuta, dijete mora obratiti pozornost na unutarnje kutove i duljine stranica trokuta. Slaganje i razlaganje kultivira analiza. Djeca mogu istraživati oblike koristeći nekoliko aktivnosti ove vrste. Kao što je prikazano na Slici 8, djeca mogu sastavljati oblike. Kada dijete spoji dva kvadrata iste veličine poravnavajući njihove širine, rezultat je dugačak pravokutnik. Kada dijete postavi dva identična polukruga zajedno poravnavajući njihove promjere, rezultat je puni krug. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)



**Slika 8.:** *Kompozicija oblika*

Djeca također mogu razlagati oblike. Kao što je prikazano na slici 9, kada dijete podijeli pravokutnik duž njegove dijagonale ili presiječe jednakostranični trokut po sredini, dijete dobije dva pravokutna trokuta. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)



**Slika 9.:** *Dekompozicija oblika*

## 3.2. Otkrivanje prostora

Ljudima su potrebni osnovni koncepti prostora ako žele adekvatno funkcionirati u svakodnevnom svijetu. Iz tog razloga, često sama, mala djeca (čak i dojenčad) počinju koristiti ili razvijati osnovne prostorne koncepte, uključujući ideje o lokaciji, relativnom položaju, simetriji i smjeru. Neke prostorne vještine i ideje ugrađene su u ljudski perceptivni sustav: čak i bebe pokazuju da mogu razlikovati blizu i daleko kada pokušaju posegnuti za

bližom od dvije igračke. Bebe i mala djeca dodatno razvijaju ove sposobnosti dok puze ili hodaju, postaju svjesni svoje okoline i razmišljaju kamo idu. Znaju gdje se nalaze u prostoru i kako se kretati s jednog mjesta na drugo. Na poznatim mjestima kao što su domovi i škole, oni općenito znaju gdje su stvari i kako doći do stvari koje žele. Saznaju da je lopta blizu stolice, da je lutka ispod stolice i da najbrži put do stolice uključuje prolazak ispod stola. Uče koristiti riječi za opisivanje položaja, mjesta i smjerova. (Marendić, 2010.)

Odgajatelji i roditelji mogu nadograđivati i proširivati ono što mala djeca već znaju o prostoru. Odrasli mogu pomoći maloj djeci da matematiziraju svoje svakodnevne ideje o prostoru. To uključuje korištenje jezika i različitih prikaza za opisivanje i razumijevanje prostornih ideja. Djeca imaju neformalno znanje o prostoru na kojem se može graditi rano obrazovanje iz matematike. Oni su prilično sposobni naučiti više o sljedećim važnim temama. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

Djeca su vješta u lociranju stvari u svom okruženju. Često koriste neformalni ili nejasan jezik kako bi opisali gdje se stvari nalaze u odnosu na druge stvari, uključujući same sebe. Ali moraju produbiti svoje razumijevanje pozicije i naučiti ispravne matematičke riječi za razgovor o tome. Na primjer, postoji mnogo vrsta jabuka i dijete ih može lako naučiti prepoznati kao jabuke. Ali pozicije i lokacije su apstraktne ideje i sve su relativne. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

Drugi način razmišljanja o prostornim odnosima je da objekti služe kao orijentiri za dotičnu lokaciju. Oznaka znači označiti zemljište ili odrediti objekt koji pomaže u definiranju lokacije. Čak i mala djeca mogu koristiti orijentire kako bi pronašli mjesto skrivenog predmeta. Na primjer, ako stavite igračku iza sofe dok dijete gleda, ono može kasnije pronaći igračku: zna da je igračka iza sofe. U ovom slučaju igračka je objekt, kauč je orijentir, a odnos između orijentira i predmeta je iza ili straga. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

U svim ovim slučajevima djeca moraju naučiti dvije stvari: riječi i pojmove. Moraju naučiti pozicione riječi kao što su iznad ili pored i trebaju znati koncepte na koje se te riječi odnose. Na primjer, riječ "pored/pokraj" se odnosi na koncept koji navodi da je objekt u susjedstvu drugog na različite načine, bilo s njegove desne ili lijeve strane. Možete pomoći djeci da nauče razvijati te riječi i pojmove modeliranjem. Na primjer, ako se dijete predškolske dobi upita: "Gdje su slikovnice?" Dijete može odgovoriti: "Tamo" i gestikulirati. Na što možemo odgovoriti: "U pravu si. Nalaze se na polici pored ormara za kapute." (Marendić, 2010.)

### *3.2.1. Važnost matematičkog razumijevanja prostora*

Mnogo je razloga za učenje o prostoru, baš kao i za oblik i broj. Prostor je sam po sebi zanimljiv. Prostorne ideje uključuju sljedeće: jednostavnu lokaciju i položaj (pas je na vrhu slona, a slon je u isto vrijeme ispod psa), perspektivu (“S mjesta gdje sjedim vidim mačku s lijeve strane i kita s desne strane, ali s mjesta na kojem sjedite, nasuprot mene, vidite mačku s desne strane i kita s lijeve strane”), praćenje orijentacijskih uputa (npr. dijete može doći do škrinje s blagom tako da hoda dva koraka naprijed, skreće udesno, a zatim se pomakne četiri koraka naprijed, nakon čega dijete napravi pola okreta ulijevo i prati dijagonalu pet koraka), estetske kvalitete refleksijske simetrije. (Montague-Smith, Cotton, Hansen & Price, 2017.)

Svaka od ovih tema predstavlja izazove: ako je miš na mački koja je na psu, onda je mačka i na i ispod nečeg drugog u isto vrijeme. Djeci je teško uskladiti dva različita odnosa (kao što je na vrhu i ispod), ali odgajatelji im tu mogu pomoći. (Montague-Smith, Cotton, Hansen & Price, 2017.)

Prostorne ideje su temelj našeg matematičkog razumijevanja. Da bi razumjelo zbrajanje, dijete bi moglo koristiti ideje spajanja dvije odvojene skupine objekata ili skakanja udesno na standardnoj brojevnoj liniji. Da bi razumjelo oduzimanje, dijete bi moglo pomisliti na majmune koji skaču s kreveta. Kako bi razumjelo jednakost, dijete bi moglo zamisliti balansiranje objekata na vagi. Da bi razumjelo množenje, dijete se može odnositi na područja ili nizove točaka. Doista, prostorne metafore i ideje prožimaju dječje i odraslo razumijevanje broja. (Marendić, 2010.; Montague-Smith, Cotton, Hansen & Price, 2017.)

Prostorno razumijevanje, jezik i simbolika imaju praktičnu vrijednost. Djeca (i odrasli) žive u svemiru. Namjerno kretanje u njemu zahtijeva prvo razumijevanje prostornih odnosa u svakodnevnom okruženju, kao kada beba sazna da je punjena krava iza sofe. Kasnije dijete uči i koristi odgovarajući prostorni jezik za kretanje po svijetu (na primjer, kada majka kaže: “Idi u dnevnu sobu i traži ispod sofe svoju igračku rakuna.”). Kasnije je još uvijek potrebno čitanje karte autoceste da biste došli do odredišta. Odrasla osoba koristi ideje o prostoru za

izgradnju police za knjige ili tepiha u sobi. Jezik i simbolika omogućuju nam da nadmašimo svakodnevno prostorno znanje o životinjama. (Marendić, 2010.)

Prostorno znanje i jezik predviđaju budući akademski uspjeh. Ona djeca koja steknu solidno razumijevanje prostora i prostornog jezika sklona su pokazivanju viših matematičkih postignuća od učenika koji ne postižu takvo svladavanje. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005)

Pojam “lijevog” i “desnog” su poznati da su teški maloj djeci za naučiti te im je potrebno puno vježbe s tim idejama. Prvo, djeca moraju zapamtiti da je jedna ruka desna, a druga lijeva. Ova ideja se pojačava kada djeca stave naljepnicu na desnu ruku, a zatim se pravilno rukuju. Zatim djeca moraju primijeniti ideju desnog i lijevog na vanjske objekte. To je posebno teško jer su ti koncepti uvijek u odnosu na smjer u kojem je dijete okrenuto. Na primjer, ako dijete gleda u stol iz jednog smjera, vidi knjigu s desne strane i kocku s lijeve strane. Kad se pomakne na suprotnu stranu stola, vidi obrnuto. (Claessens et al., 2009; Brannon, 2005; Marendić, 2010.)

### **3.3. Aktivnosti za otkrivanje oblika i prostora**

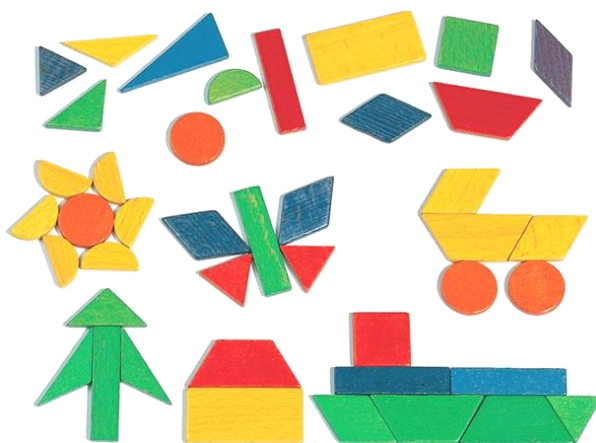
Prikaz sljedećih aktivnosti odabran je iz skupnog pregleda literature, konkretnije iz Ačkar, Dulčić, Ivančić i Bakota (2016.); Duran (2003.); Ginsburg (2006.); Van Hiele (1999.); O’Nan Brownell, Chen & Ginet (2014.).

#### ***3.3.1. Identificiranje, uspoređivanje i sortiranje oblika***

Možemo pomoći djeci da uče o geometriji identificirajući različite kutove, oblike i trodimenzionalne figure u svakodnevnim predmetima. Na način da ih zainteresiramo da prepoznaju i opišu različite oblike, da ih nacrtaju prstom u zraku, precrtaju ih prstima i/ili ih nacrtaju na papiru. Možemo potaknuti djecu da promatraju i opisuju stvari koje mogu vidjeti iz neobičnih i uobičajenih kutova, kao što je s vrha ljuljačke, gledanja kroz noge ili iz pogleda koji imaju kada leže na leđima. Ova će iskustva pomoći djeci da razumiju koncepte položaja i prostornih gledišta.

Odgajatelj može asistirati prilikom dječje izgradnje kula ili struktura od kocaka ili drugog materijala. Može voditi djecu kroz misaoni proces: da identificiraju različite oblike koji su im ponuđeni, uspoređuju međusobno svoje uratke. U sklopu ove igre, djeca mogu razvrstati blokove s obzirom na različite oblike, spajati ih i graditi zidove i tornjeve, koristeći različite oblike te odgonetnuti koja je veličina potrebna. Kroz ovu igru djeca mogu graditi vlastite strukture i istraživati svojstva trodimenzionalnog i dvodimenzionalnog oblika.

Jedan od dobrih primjera dječjeg promatranja, prepoznavanja i razlikovanja geometrijskih oblika su geometrijske pločice. S njima se upoznaju sa različitim oblicima te mogu stvarati druge veće geometrijske oblike uz pomoć manjih dijelova. Na slici 10. možemo vidjeti taj primjer dječjeg korištenja geometrijskih pločica.



**Slika 10.:** *Fröbelova slagalica obojenih geometrijskih oblika*

Možemo zamoliti djecu da prepoznaju različite veličine istog oblika. Na primjer, u sobi dnevnog boravka bi mogli tražiti pravokutnike, kao što su prozori, vrata, knjige, police, ormarići, stolovi i kockice. Zatim, pomognemo djeci dok uspoređuju veličine pravokutnika. Primjerice, vrata su veći pravokutnik od prozora, i slično.

### ***3.3.2. Likovno izražavanje i otkrivanje oblika otiskom***

Pružanje obilja prilika za samoinicijativni oblik izražavanja djece, izvrstan je način promoviranja matematike. Djeca kreativno režu, lijepe i lijepe cijevi, kutije, papirnate tanjure, špage i vrpce kako bi napravili prekrasne kreacije. U tom procesu usklađuju i spajaju oblike, otkrivaju hoće li spajalice sigurno držati materijal i karton zajedno i uče kroz

pokušaje i pogreške. Dostupnost boja, velikih listova papira i raznih kistova omogućuje i potiče djecu da koriste prostor na stranici za velike pokrete rukama i slikanje velikih krugova.

Odgajatelji mogu uz pomoć roditelja prikupiti različite trodimenzionalne objekte poput kutija, loptica, čaša, kocki, lego kocaka, građevnih blokova, svijeća i slično. Koristeći te predmete, djeca ih mogu umakati u boju te ih utiskivati na papir ili karton. Ovom aktivnošću djeca mogu uočiti ravne oblike koji čine određene strane predmeta. Imenovanje oblika, dvodimenzionalnih koji bojom nastaju na papiru i trodimenzionalnih oblika koje koriste za otiskivanje, pomoći će ojačati prepoznavanje oblika. Osim što ova aktivnost potiče kreativnost, potiče i razvoj fine motorike, koordinacije i kontrole ruke i oka, koncentraciju, svijest o prostoru kroz eksperimentiranje i istraživanje oblika i prostora. Slika 11. daje primjer korištenja geometrijskih tijela za otiskivanje njihovih ravnih ploha na papiru.



**Slika 11.:** otisak geometrijskih tijela na papiru

### ***3.3.3. Izrada oblika***

Između ostalog, djeca mogu sama stvarati oblike od različitih materijala, primjerice čačkalica, drevnih štapića, slamki i sličnog materijala. Prilikom izrade oblika možemo ih dodatno poticati razgovorom tijekom same izrade. Na primjer, ukoliko naprave trokut, možemo ih upitati kako bi mogli od tog oblika napraviti kvadrat. Još jedna mogućnost stvaranja novih oblika jest da djeca zalijepe dva ili više oblika izrezanih od papira na drugi prazan komad papira kako bi oblikovala druge oblike. Također, u sklopu izrade oblika, još jedan koristan materijal je masa za modeliranje. Djeca mogu uz pomoć kalupa za kolačiće i plastičnih noževa eksperimentirati i time stvarati različite oblike i identificirati ih samostalno ili uz odgajateljeve poticaje. Slika 12. prikazuje korištenje mase za modeliranje u svrhu

izrezivanja raznih oblika.

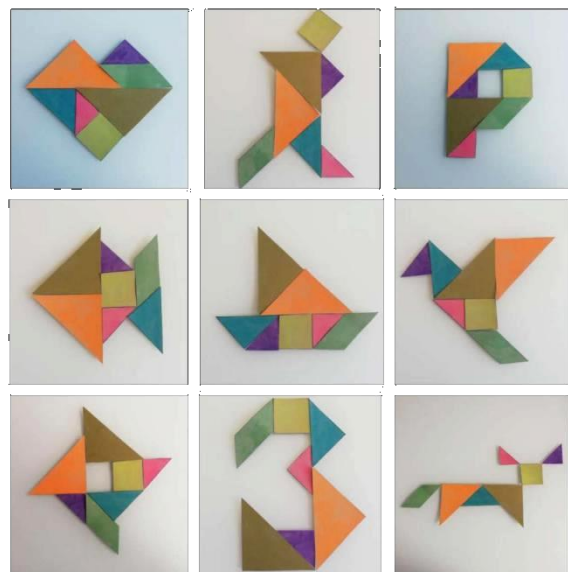


**Slika 12.:** korištenje kalupa i mase za modeliranje

Još jedan od prigodnih materijala za poticanje vizualno-figurativnog mišljenja, logičkog zaključivanja i pred matematičkih vještina (razumijevanje boje, veličine i oblika) jest tangram. Osim što kombiniranje različitih geometrijskih oblika poticajno djeluje na dječju maštu i stvaralaštvo, ova igra je praktična za realizaciju sadržaja početnih matematičkih pojmova. Tangram, prikazan na Slici 13., je stara kineska matematička slagalica koja se sastoji od 7 dijelova (dva mala trokuta, jedan srednji trokut, dva velika trokuta, jedan paralelogram i jedan kvadrat) koji tvore kvadrat. Cilj ove igre je stvoriti različite figure, prikazano na slici 14. koristeći se sa sedam dijelova tangrama, koristeći se pritom mozaičkim principom.



**Slika 13.:** Tangram



**Slika 14.:** Različite figure tangrama

### 3.3.4. Čitanje

Čitanje osim što omogućuje razvijanje djetetovih pismenih i verbalnih kompetencija, također može služiti kao sredstvo za poticanje usvajanja matematičkih vještina. Kroz razgovor o slikama u knjigama i/ili časopisima djeca će početi shvaćati odnose između objekata na slikama, kao što će moći vidjeti i razne primjere raznoraznih oblika.

Jedan od primjera je slikovnica Nine Vađić: “Ti nisi kao mi”, slika 15., koja obrađuje temu različitosti kroz glavne likove radnje - geometrijske oblike.



**Slika 15.:** slikovnica Nine Vađić: “Ti nisi kao mi”

### 3.3.5. Igra

Osim što igra snažno motivira razvoj kognitivnih i motoričkih sposobnosti, potiče stvaranje socijalnih kontakata, zadovoljava emocionalne potrebe, potiče maštu i kreativnosti, obogaćuje govor i rječnik djece - ujedno razvoja i shvaćanje pojmova (Ačkar, 2016.). U sklopu naše tematike, to se odnosi na kako na matematičke i geometrijske pojmove.

Igre kao što su slagalice, igre s kartama s odgovarajućim oblicima samo su neki od primjera igara za poticanje matematičkog razmišljanja kod djece. Kako djeca postaju starija, odgajatelj im može ponuditi prilagođenu varijaciju primjerice igre “skrivača”, u kojoj se ne skrivaju djeca već oblici. Može se izrezati od papira nekoliko uobičajenih oblika, te djeca mogu u timu ili individualno tražiti "skriveno" trokute, kvadrate ili pravokutnike u svom okruženju – tj. sat može biti primjer oblika kruga. Također, jedna od mogućih igara je igra sa osjetilom dodira; u vrećicu se mogu staviti različita geometrijska tijela, a zadatak je da dijete



bez gledanja pogodi o kojem se predmetu radi. (Van Hiele, 1999.)

### ***3.3.6. Pjesma i pokret***

Za dodatno usvajanje određenih matematičkih vještina, odgajatelji mogu djeci ponuditi pjesme i rime. Osim što ih kroz glazbene poticaje upoznajemo sa razvijanjem sluha, osjećaja za ritam, tempo i slično, pjesme - posebno pjesme sa pokretima - potiču prostornu svijest. Primjerice, pjesma "Hoki poki" odličan je primjer za poticanje prostorne svijesti kod djece rane i predškolske dobi.

Djeca istražuju prostornu svijest kroz različite vrste pokreta, npr. ravnotežu, lokomociju i manipulaciju; Neka se penju u kutije i iz njih, na ili oko namještaja, prolaze ispod, preko, okolo, kroz, u, na vrh i van različitih stvari u njihovom okruženju.

### ***3.3.7. Pijesak i voda***

Pijesak i voda odličan su materijal za istraživačku aktivnost, osim što djecu možemo upoznati sa raznim svojstvima tekućina i krutih tvari, pijesak možemo koristiti za istraživanje prostornih odnosa. Djeca mogu napraviti različite oblike i linije u pijesku pomoću niza alata kao što su kantice – za istraživanje trodimenzionalnoga oblika, grablja, štapića, perja, vode, kalupa i tako dalje.

## 4. ULOGA ODGAJATELJA U RAZVOJU MATEMATIČKIH POJMOVA

Treba biti jasno da je uloga odgajatelja u poticanju razvoja matematičkih pojmova i vještina kod djece u osnovi pružiti potrebna i prikladna iskustva koja će svakom djetetu omogućiti stjecanje pojmova koje mora naučiti. Da bi to učinio, sam odgajatelj prije svega mora biti svjestan relevantnih pojmova. Upravo u tom pogledu odgajateljevo znanje i razumijevanje matematike ima presudnu ulogu i iz tog razloga odgajatelj koji želi uspješno prenijeti matematička znanja djeci, treba osigurati da stekne to znanje i razumijevanje. (Ginsburg, 2006.)

To ne znači da odgajatelj mora proći tečaj napredne algebre ili geometrije, ali bi trebao biti sposoban identificirati i jednostavnim riječima opisati sve relevantne koncepte tema koje se nalaze u osnovnoškolskoj matematici i trebao bi biti sposoban objasniti s razumijevanjem i povjerenjem matematičke postupke koje uče osnovnoškolci. Na primjer, koje pojmove želimo da dijete usvoji kada koristi množenje? Odgajatelj mora znati da se množenje može tumačiti kao ponovljeno zbrajanje, kao broj objekata raspoređenih u pravokutni niz redaka i stupaca ili kao kartezijev produkt skupova. Odgajatelj mora odlučiti je li dijete sposobno usvojiti sva tri načina ili da li bi mu bilo u interesu da izostavi posljednju interpretaciju. (Ginsburg, 2006.)

Nadalje, u svom podučavanju, odgajatelj će započeti s iskustvenom i govornom reprezentacijom pojmova i mora prosuditi kada može zamijeniti konkretne materijale sa slikovnim prikazom i na kraju sa čistim matematičkim simbolima. Kako dijete napreduje u svom učenju množenja, odgajatelj također treba osigurati da će ga obavljeni rad dovest do formiranja dodatnih osnovnih matematičkih koncepata da je množenje komutativno, asocijativno, distributivno u odnosu na zbrajanje i da množenje bilo kojeg broja s 1 rezultira istim brojem. Tek kad dijete shvati svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju moći će razumjeti uobičajenu dugu tehniku množenja koju će kasnije učiti. (Ginsburg, 2006.)

Nakon što je identificirao pojmove koje dijete treba naučiti, odgajatelj će zatim sukladno djetetovom razvoju, ponuditi aktivnosti i materijale kojima će dodatno poticati njegov razvoj matematičkih vještina. U redoslijed gradiva, odgajatelj osigurava da nema velike praznine i

da su novi koncepti i vještine koje treba uvesti uvijek na temelju onoga što je dijete prethodno naučilo. Na ovaj način, učenje koje se odvija koristi se djetetovim prethodnim znanja i nadograđuje više znanja na ovu strukturu. Ujedno je važno i obilježje matematičkih aktivnosti da odgajatelj treba uvesti odgovarajući matematički vokabulara dok se pojmovi i vještine uče. Odgajatelj koji shvaća da dijete treba osposobiti se za korištenje matematičkog jezika, pristupit će radu na brojevima i operacijama kroz problemske situacije koje se temelje na vlastitom iskustvu i okruženju djeteta. Radeći to, odgajatelj neće samo razvijati matematički jezika djeteta nego će mu također dati priliku da razvije vještinu rješavanja problema. (Ginsburg, 2006.)

Marendić (2010.) navodi da je posao odgajatelja:

“Pomoći djetetu da nadograđuje na postojeće znanje (djeca imaju neformalna matematička znanja i na njima treba graditi nova); omogućiti djetetu slobodu za njegove vlastite konstrukcije (prečesto u matematici dopuštamo samo određeni način rješavanja problema a ne uvažavamo da djeca mogu imati svoje vlastite strategije koje mogu odlično funkcionirati); osigurati atmosferu u kojoj rasprava pomaže izgradnji djetetovih znanja (atmosfera u kojoj se raspravlja o putovima rješavanja problema može pridonijeti djetetovim matematičkim spoznajama); učenje se može odigravati i kroz kognitivni konflikt pred koji odgajatelji stavljaju dijete kao bi preispitalo svoja znanja (prečesto poučavamo tako da izravno serviramo rješenja umjesto da djeci ponudimo situacije u kojima sami moraju naći odgovore na nejasnoće i dvojbe); pripremiti manipulativne materijale ili ilustracije nužne za poučavanje s razumijevanjem (u poučavanju matematike rabimo manipulativne materijale, ali relativno brzo odustajemo od njih iako su djeca sve negdje do 6. razreda u razvojnoj fazi konkretnih operacija); osigurati socijalnu interakciju – dijete će biti potaknuto reakcijama druge djece (matematika se u školama vrlo često poučava kao samostalno rješavanje zadataka, a djeca bi mogla puno naučiti u međusobnoj interakciji i razmjeni strategija); omogućiti djeci bogatu okolinu, složene situacije koje će potaknuti rješavanje problema (računanje nije izazov ali rješavanje složenih problema jest, a to je ujedno i priprema za onakvu matematiku s kojom ćemo se susretati u stvarnom životu).” (Marendić, 2010: 6-7)

Nadalje, predstaviti ćemo ideju kako bi kvalitetan odgajatelj trebao imati znanja u tri područja: znanje o matematici, djeci i o nastavnoj praksi, a to je od velike važnosti za poučavanje rane matematike.

## **4.1. Znanja koja ima kompetentan odgajatelj**

Kompetentan odgajatelj treba imati znatni opus znanja o raznim sferama; od matematičkog, pedagoškog do nastavnog znanja.

### ***4.1.1. Matematičko znanje***

Matematičko znanje uključuje poznavanje matematičkih činjenica, pojmova, postupaka i odnosa među njima; poznavanje načina na koje se matematičke ideje mogu predstaviti; i znanje o matematici kao disciplini—posebno o tome kako se matematičko znanje proizvodi, prirodi diskursa u matematici te normama i standardima dokaza koji vode argumente i dokaze. U našoj upotrebi termina, znanje matematike uključuje razmatranje ciljeva matematičkih aktivnosti i pruža osnovu za razlikovanje i određivanje prioriteta tih ciljeva. (Ginsburg, 2006.)

Poznavanje matematike također podrazumijeva više od znanja matematike za sebe. Odgajatelji svakako moraju biti sposobni ispravno razumjeti pojmove i točno izvoditi postupke, ali također moraju biti sposobni razumjeti konceptualne temelje tog znanja. Tijekom svog rada odgajatelji moraju razumjeti matematiku na načine koji im omogućuju da objasne i raspakiraju ideje na načine koji nisu potrebni u običnom odraslom životu. Matematički senzibilitet koji imaju važan je u vođenju njihovih odluka i tumačenju matematičkih napora djece. Odgajatelj treba biti na određenoj višoj razini/posjedovati dublje razumijevanje i biti svjestan da s djecom mora komunicirati na njihovoj razini primjerice na način da se koristi odgovarajućim jezikom. (Ginsburg, 2006.; Van Hiele, 1999.)

### ***4.1.2. Pedagoško znanje o djeci***

Znanje djece i načina na koji uče matematiku uključuje opće znanje o tome kako se različite matematičke ideje razvijaju kod djece tijekom vremena, kao i specifično znanje o tome kako odrediti gdje bi se dijete moglo nalaziti u razvojnoj putanji. Uključuje upoznavanje s uobičajenim poteškoćama koje djeca imaju prilikom savladavanja određenih matematičkih koncepata i postupaka, a obuhvaća znanje o učenju i o vrstama iskustava, dizajna i pristupa koji utječu na razmišljanje i učenje djece. (Ginsburg, 2006.; Copley, 2010.)

### ***4.1.3. Znanje o nastavnoj praksi***

Poznavanje nastavne prakse uključuje poznavanje nastavnog plana i programa, poznavanje zadataka i alata za poučavanje važnih matematičkih ideja, znanje o dizajnu i upravljanju diskursom u skupini te poznavanje normi koje podupiru razvoj matematičke sposobnosti. Međutim, podučavanje podrazumijeva više od znanja. Odgajatelji moraju raditi kao i znati.

Na primjer, znanje o tome što čini dobar nastavni zadatak je jedna stvar; mogućnost učinkovitog korištenja zadatka u skupini sa grupom djece je druga stvar. Razumijevanje normi koje podržavaju produktivnu aktivnost u sobi dnevnog boravka odgajateljeve skupine, razlikuje se od mogućnosti razvijanja i korištenja takvih normi sa raznolikom skupinom djece. (Ginsburg, 2006.; Copley, 2010.)

## **4.2. Stručnost poučavanja matematike**

Uspješno poučavanje karakterizira razumijevanje ideja; spreman pristup vještinama i postupcima; sposobnost formuliranja i rješavanja problema; sposobnost promišljanja, evaluacije i prilagođavanja vlastitog znanja; sposobnost zaključivanja od onoga što je poznato do onoga što se želi; i uobičajena sklonost da se onome što se uči daje smisao i vrijednost. Nastava je složena aktivnost i, kao i druge složene aktivnosti, može se zamisliti u terminima sličnih komponenti. Baš kao što samo matematičko znanje uključuje isprepletene niti, podučavanje matematičkog znanja zahtijeva slično međusobno povezane komponente. (Copley, 2010.)

U kontekstu provedbe matematičkih i mnogih drugih aktivnosti, stručnost zahtijeva: konceptualno razumijevanje temeljnog znanja potrebnog u praksi poučavanja; tečnost u izvođenju osnovnih nastavnih rutina; stratešku kompetenciju u planiranju učinkovitih aktivnosti i rješavanju problema koji se javljaju tijekom istih; spremnost i dosljednost na stalnoj refleksivnoj praksi glede svog rada, načina provođenja i organiziranja aktivnosti, povratnim informacijama kolega, djece i njihovih roditelja; i produktivan stav prema matematici, podučavanju, učenju i poboljšanju prakse. Poput lanaca znanja matematike, ove

komponente znanja matematike su međusobno povezane. (Copley, 2010.)

### **4.3. Kvalitetno usvajanje pojmova rane matematike**

Kvalitetni program u predškolskoj dobi nalikuje dobroj nastavi u ranim osnovnim razredima. Najbolji predškolski programi su oni u kojima su djeca sustavno, redovito i često uključena u mješavinu aktivnosti koje vodi odgajatelj i dijete pokreće, a koje pospješuju razvoj znanja i vještina (Belfield & Barnett, 2006.;Rimm-Kaufman, La Pro, Downer & Pianta, 2005.).

Također, odgajatelji u kvalitetno uređenoj i opremljenoj sobi dnevnog boravka pokazuju upoznatost s akademskim potrebama djece, osjetljivi su prema pojedinoj djeci i modificiraju aktivnosti kako bi odgovarali razvojnim, emocionalnim i akademskim potrebama svoje skupine djece. Oni također imaju tendenciju promicati učenje djece kroz podršku te nude odgovarajuća pitanja i povratne informacije (Rimm-Kaufman i sur., 2005.).

Kompetentni odgajatelji također se pažljivo pripremaju, razumiju matematiku koju predaju, motiviraju svoju djecu igrama i zanimljivim aktivnostima, koriste korisne materijale i manipulativna sredstva te iskorištavaju njihove potencijale za nastavne ideje, posjeduju znanje o pedagoškom sadržaju potrebnom za učinkovito provođenje plana i programa rada, potiču jezične vještine i metakogniciju. Kompetentni odgajatelji, također znaju kada rasporediti djecu u grupe odgovarajuće veličine - cijela skupina, male grupe ili pojedinačno - ovisno o prirodi aktivnosti. (Rimm-Kaufman i sur., 2005.)

## 5. Zaključak

Matematika je fascinantna predmet. S jedne strane, može biti vrlo složen i tehnički, te se koristiti za razvoj sofisticiranih algoritama za rješavanje problema na globalnoj razini. Ujedno, to je alat kojim se u svakodnevnom životu služimo za sortiranje, brojanje, mjerenje i analizu. A sve navedeno spada pod elemente matematike. Matematika je stoga posvuda i u svemu što radimo. Kada je u pitanju učenje matematike, koncepti se protežu od brojeva, uzoraka, algebre, geometrije, analize podataka do mjerenja, novca i vremena.

Ljudima su potrebni osnovni koncepti prostora ako žele adekvatno funkcionirati u svakodnevnom svijetu. Iz tog razloga, često sama, mala djeca (čak i dojenčad) počinju koristiti ili razvijati osnovne prostorne koncepte, uključujući ideje o lokaciji, relativnom položaju, simetriji i smjeru. Neke prostorne vještine i ideje ugrađene su u ljudski perceptivni sustav: čak i bebe pokazuju da mogu razlikovati blizu i daleko kada pokušaju posegnuti za bližom od dvije igračke. Dijete od najranije dobi istražuje svoje okruženje, koristeći pritom sva svoja osjetila. Iskustveno učenje je stoga neophodno i od iznimne važnosti za djecu. Učenje rane matematike se gradi upravo na dječjem neformalnom znanju o prostoru.

Odgajatelji i roditelji mogu nadograđivati i proširivati ono što mala djeca već znaju o prostoru. Odrasli mogu pomoći maloj djeci da matematiziraju svoje svakodnevne ideje o prostoru. To uključuje korištenje jezika i različitih prikaza za opisivanje i razumijevanje prostornih ideja. Ukratko, odgajatelj je u ovom kontekstu rada prvenstveno pružatelj matematičkog okruženja, organizator pomagala i materijala za učenje i supervizor koji vodi dijete kroz pričanje, ispitivanje i raspravu kako bi djeca formirala pojmove i svladala vještine. Odgajatelj mora biti svjestan potreba svakog djeteta i stupnja razvoja u kojem se nalazi kako bi mu mogli najbolje pomoći. Odgajatelj će tada znati je li dijete spremno naučiti nove koncepte i vještine ili mu trebaju raniji koncepti i vještine koje treba prvo konsolidirati i ojačati.

U radu smo naveli različite poticaje i načine implementacije matematičkih znanja u obliku djeci zanimljivih i istraživačkih aktivnosti - koji služe između ostalog za dječje otkrivanje oblika i prostora.

## 6. Literatura

1. Ačkar, J., Dulčić, A., Ivančić, Đ. i Bakota, K., (2016), *Vrtuljak igara*, Zagreb: Školska knjiga
2. Brannon, E. M. (2005). The independence of language and mathematical reasoning. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 102(9), 3177–3178.
3. Belfield, C. R., Nores, M., Barnett, S., & Schweinhart, L. (2006). The high/scope perry preschool program cost–benefit analysis using data from the age-40 followup. *Journal of Human resources*, 41(1), 162-190.
4. Copley, J. V. 2010. *The Young Child and Mathematics*. 2nd ed. Washington, DC: NAEYC.
5. Claessens, A., Duncan, G., & M. Engel. (2009). “Kindergarten skills and fifth-grade achievement: Evidence from the ECLS-K. *Economics of Education Review*, 28(4), 415-427.
6. Čizmešija, A., Svedrec, R., Radović, N. & Soucie, T. (2010) *Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole*. U: Mladnić, P. & Svedrec, R. (ur.) *Zbornik radova IV. kongresa nastavnika matematike RH*. Zagreb, Školska knjiga, Hrvatsko matematičko društvo, str. 143-162.
7. Duran, M. (2003), *Dijete i igra*, 4. izdanje, Jastrebarsko: Naklada Slap.
8. Fuson, K. (1988). *Children’s Counting and Concepts of Number*. New York: Springer Verlag.
9. Gopnik A., Sobel D. M., Schulz, L. E., & Glymour, C. (2001). Causal learning mechanisms in very young children: Two-, three-, and four-year-olds infer causal relations from patterns of variation and covariation. *Developmental Psychology*, 37(5), 620-629
10. Ginsburg, H. P. (2006). *Mathematical Play and Playful Mathematics: A Guide for Early Education*. In D. G. Singer, R. M. Golinkoff, & K. Hirsh-Pasek (Eds.), *Play = learning: How play motivates and enhances children's cognitive and social-emotional growth* (pp. 145–165). Oxford University Press.
11. Gallistel, C. R. & Gelman, R. (1992). Preverbal counting and computation. *Cognition*, 44, 43–74.



12. Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The Child's Concept of Number*. Cambridge, MA: Harvard University Press
13. Gelman, R. & Butterworth, B. (2005). Number and language: how are they related? *Trends in Cognitive Sciences*, 9(1), 6–10.
14. Howse, T. & Howse, M. (2015). Linking the Van Hiele Theory to Instruction., *Teaching Children Mathematics*. 21. 304.
15. Marenić, Z. (2010). Razvoj matematičkih pojmova. *Dijete, vrtić, obitelj*, 16 (60), 2-7. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/127938>
16. Montague-Smith, A., Cotton, T., Hansen, A., & Price, A. J. (2017). Shape and space, in: *Mathematics in early years education* ( 4th ed., Vol. 6., str. 153-188.), Routledge.
17. National Research Council. (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington, DC: The National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/12519>
18. O'Nan Brownell, J, Jie-Qi Chen, Ginet, L.: *Big Ideas of Early Mathematics - What teachers of Young Children Need to Know*, Pearson Education, SAD, 2014.
19. Rimm-Kaufman, S. E., La Paro, K. M., Downer, J. T., & Pianta, R. C. (2005). The contribution of classroom setting and quality of instruction to children's behavior in kindergarten classrooms. *The elementary school journal*, 105(4), 377-394
20. Slunjski, E., (2012), *Tragovima dječjih stopa*, 1. izdanje, Zagreb: Profil.
21. Ten Braak, D., Lenes, R., Purpura, D.J., Schmitt, S.A., Størksen, I., Why do early mathematics skills predict later mathematics and reading achievement? The role of executive function, *Journal of Experimental Child Psychology*, Volume 214,2022, 105306,ISSN 0022-0965, <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105306>.
22. Van Hiele, P.M. (1999) *Developing Geometric Thinking through Activities that Begin with Play*. *Teaching Children Mathematics*, 5-6, 310-317.
23. Watts, T. W., Duncan, G. J., Siegler, R. S., & Davis-Kean, P. E. (2014). What's past is prologue: Relations between early mathematics knowledge and high school achievement." *Educational Researcher*, 43(7), 352-360.
24. Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358, 749–75
25. Xu, F. & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Science*, 7, 164–169

26. Slika 3 i 4.;

[https://study.com/cimages/multimages/16/two\\_dimensional\\_shapes\\_with\\_labels.png](https://study.com/cimages/multimages/16/two_dimensional_shapes_with_labels.png)

27. Slika 5.:

<https://p7.hiclipart.com/preview/151/1018/465/triangle-yellow-pyramid-pattern-triangle-png-photo.jpg> i [https://d138zd1ktt9iqe.cloudfront.net/media/seo\\_landing\\_files/types-of-pyramids-162\\_5026771.png](https://d138zd1ktt9iqe.cloudfront.net/media/seo_landing_files/types-of-pyramids-162_5026771.png)

28. Slika 6.:

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/89/Types\\_of\\_triangles\\_he.svg/1200px-Types\\_of\\_triangles\\_he.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/89/Types_of_triangles_he.svg/1200px-Types_of_triangles_he.svg.png)

29. Slika 7: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS5EQETD8Q0yIc2GTUQPNLtF3G2Fg-aiR-MA&usqp=CAU>

30. Slika 10.: [http://www.idadidacta.hr/upload/proizvodi/109100\\_103956.jpg.axd?width=618&height=458&crop=auto](http://www.idadidacta.hr/upload/proizvodi/109100_103956.jpg.axd?width=618&height=458&crop=auto)

31. Slika 11.: <https://www.discountsschoolsupply.com/medias/STEM-stamping-shapes-004.jpg?context=bWFzdGVyfHJvb3R8MTYxMjk2fGltYWdlL2pwZWd8aGFkL2g3Ny84ODUxMjE4NzkyNDc4L1NURU1fc3RhbnBpbmdfc2hhcGVzXzAwNC5qcGd8NTljMmFhYmU0MWMzZGUzYTRkOWMzYTU2NTQwZWY1NjE3NzVIOWJIMjA0MmI3ZDVhMDU2NWU4Y2Q1YzJlZTcwNA>

32. Slika 12.: [https://cdn.shopify.com/s/files/1/1687/0287/products/shapeskit2\\_36b2747b-0b81-41d0-adcc-f42fce54b7ba\\_540x.jpg?v=1571589869](https://cdn.shopify.com/s/files/1/1687/0287/products/shapeskit2_36b2747b-0b81-41d0-adcc-f42fce54b7ba_540x.jpg?v=1571589869)

33. Slika 13.: <https://www.vrtic-vg.hr/ostanimodoma/39/slika%201.-1200.jpg>

34. Slika 14.: <https://www.vrtic-vg.hr/ostanimodoma/39/slika%208.-1200.jpg>

35. Slika 15.: <https://www.hocuknjigu.hr/getmedia/42ec4bbc-adc6-4a5a-97f7-429655e70861/9789534807804.jpg.aspx?maxsidesize=380>